

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

GEORGES BRILLOUET

1^{re} THÈSE

ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES SUR LES ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

MÉTHODE DE RELAXATION

Soutenues le 4 février 1956, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. VILLAT	{	Président.
		PÉRÈS		Examineurs.
		PONCIN		

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : BRILLOUET.

Prénom : Georges.

Date de la soutenance : 4 Février 1956.

Numéro d'ordre : Série A. 2874, N° 3746.

BRILLOUET (Georges). —

Étude de quelques problèmes sur les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air, 1957. In 8°, 145 pages, 29 fig.

(Th. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

BRILLOUET (Georges). —

Étude de quelques problèmes sur les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air, 1957. In 8°, 145 pages, 29 fig.

(Th. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

BRILLOUET (Georges). —

Étude de quelques problèmes sur les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air, 1957. In 8°, 145 pages, 29 fig.

(Th. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

BRILLOUET (Georges). —

Étude de quelques problèmes sur les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air, 1957. In 8°, 145 pages, 29 fig.

(Th. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : BRILLOUET.

Prénom : Georges.

Numéro d'ordre : Série A. 2874, N. 3746.
Date de la soutenance : 4 février 1956.

Étude de quelques problèmes sur
les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air,
1957. In 8°, 145 pages, 20 fig.

(Tr. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

Étude de quelques problèmes sur
les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air,
1957. In 8°, 145 pages, 20 fig.

(Tr. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

Étude de quelques problèmes sur
les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air,
1957. In 8°, 145 pages, 20 fig.

(Tr. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

Étude de quelques problèmes sur
les ondes liquides de gravité. —
Paris, Imp. du Ministère de l'Air,
1957. In 8°, 145 pages, 20 fig.

(Tr. Sc. Math. Paris, 1956. Série A. 2874. N° 3746)

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

GEORGES BRILLOUET

1^{re} THÈSE

ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES SUR LES ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

MÉTHODE DE RELAXATION

Soutenues le 4 février 1956, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. VILLAT	Président.
		PÉRÈS	Examineurs.
		PONCIN	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552424_0029

ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES
SUR LES ONDES LIQUIDES DE GRAVITÉ

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LAPORTE	T	Physique générale et Radio-activité.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	JANET	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	PETIT	T	Biologie maritime.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	GALLIEN	T	Embryologie.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	EICHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
JOB	T	Chimie générale.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P.C.B.).
PRENANT	T	Anatom. et Histol. comparées.	M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie-physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	THELLIER	T	Physique du globe.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	AUDUBERT	T	Électrochimie.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	GRIVET	T	Radio-électricité.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
Jacques BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
M ^{me} JOLIO-CURIE	T	Physique nucléaire et Radio-activité.	QUELET	T	Chimie organique.
PLANTEFOL	T	Botanique.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CABANNES	T	Recherches physiques.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	JUNG	T	Pétrographie.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	TRILLAT	T	Chimie-Physique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	WIEMANN	T	Chimie (M.P.C.).
WYART	T	Minéralogie.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Phys. céleste.
TEISSIER	T	Zoologie.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	M. PRUVOST	T	Géologie.
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
PIVETEAU	T	Géologie.	HOCART	T	Minéralogie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	J.-P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.	MAY	T	Biologie animale (P.C.B.).
FAVARD	T	Mécanique générale.	CHOOUET	T	Calcul diff. et intégral.
COULOMB	T	Physique du globe.	FELDMANN	T	Biologie (P.C.B.).
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).	GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	JOST	T	Biologie (P.C.B.).
P. DRACH	T	Zoologie.	FORTET	T	Calcul des probabilités.
KASTLER	T	Physique.	SCHWARTZ	T	Méthode math. de la Physique.
EPHRUSSI	T	Génétique.	CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	MALAVARD	T	Aviation.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.).	BRELOT	T	Calcul différentiel.
GAUTHERET	T	Biologie Végétale (P.C.B.).	NORMANT	T	Chimie (P.C.B.).
LUCAS	T	Physique.	BÉNARD	T	Chimie (P.C.B.).
A. THOMAS	T	Biologie Cellulaire.	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
ARNULF	T	Optique appliquée.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
Max MORAND	T	Physique.	GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.).
SOLEILLET	T	Physique.	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
DANJON	T	Astronomie.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliqué.
FROMAGEOT	T	Chimie biologique.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
			CHADEFAUD	T	Botanique.
			DESTRIAU	T	Physique (M.P.C.).
			M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie générale.
			SALEM	T	Mathématiques générales.
			ESCLANGON	T	Physique (P.C.B.).
			LELONG	T	Mathématiques générales.

Secrétaire général Ch. MONIER

A Monsieur Henri VILLAT

Membre de l'Institut

A Monsieur Joseph PÉRÈS

Membre de l'Institut

Doyen de la Faculté des Sciences de Paris

A Monsieur Henri PONCIN

Professeur à la Sorbonne

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE PREMIER	
Formulation générale du problème étudié	
1,0 Hypothèses fondamentales	5
1,1 Équations exactes du mouvement	5
1,2 Équations linéarisées du mouvement	7
1,3 Mouvements périodiques	8
1,4 Mouvements bidimensionnels	9
1,5 Mouvements tridimensionnels et tridimensionnels restreints	10
1,6 Nature et position des obstacles fixes donnés.....	11
1,7 Objet de l'étude qui suit	12
CHAPITRE II	
Méthode générale de résolution du problème	
2,0 Généralités	13
2,1 Formation des opérateurs T et $\mathcal{C}$	13
2,11 Prolongement préalable de $f(z)$	13
2,12 Transformation des conditions aux limites	15
2,13 Détermination de l'opérateur différentiel $\mathcal{C}$	15
2,14 Détermination de l'opérateur différentiel T	19
2,2 Détermination des transformées fonctionnelles $\mathcal{C} f(z)$ et $T \varphi(x, y)$ dans $\mathfrak{D}$...	20
2,21 Détermination de $\mathcal{C} f(z)$ (mouvements 2 D)	20
2,22 Détermination de $T \varphi(x, y)$ (mouvements 3 DR)	22
2,23 Comparaison avec la méthode de STOKER	24
2,3 Forme finale des équations du problème	26
2,4 Étude des quantités ρ_j	27
2,41 Relations entre les ρ_j	27
2,42 Images des ρ_j dans le plan complexe	28

2,5	Étude des quantités a_j	29
2,50	Définition	29
2,51	Relations fondamentales	30
2,52	Expression explicite des a_j	31
2,6	Étude des sommes S_h	32
2,60	Définition	32
2,61	Propriété de périodicité	33
2,62	Calcul de S_h pour $0 \leq h \leq q - 1$ (p quelconque)	33
2,63	Calcul de S_h pour $q \leq h \leq 2q - 1$ ($p = 1$)	34

CHAPITRE III

Représentation de certaines intégrales d'équations différentielles

3,0	Généralités	37
3,1	Cas où $E(z) = \frac{1}{z^n}$ (n entier positif)	38
3,11	Méthode de la variation des constantes	38
3,12	Méthode de LAPLACE	40
3,13	Comparaison des résultats	40
3,2	Cas où $E(z) = \frac{1}{z^\lambda}$ ($\lambda \neq$ entier positif)	44
3,21	Méthode de la variation des constantes	44
3,22	Méthode de LAPLACE	46
3,221	Formule valable pour λ non entier positif	46
3,222	Formule valable pour λ positif	48
3,23	Comparaison des résultats	49
3,231	Comparaison dans le cas $\lambda > 0$	50
3,232	Comparaison avec (3/22)	51
3,3	Généralisation possible de la méthode de LAPLACE	52

CHAPITRE IV

Étude du cas $\alpha = \frac{\pi}{2q}$ (q entier)

4,0	Généralités	53
4,1	Solution du problème homogène	53
4,2	Solution générale du problème — Solutions fondamentales	55
4,21	Intégrale générale de (4/1)	55
4,22	Traduction des conditions aux limites	57
4,23	Solutions fondamentales du problème	58
4,24	Autres représentations des solutions fondamentales	59
4,3	Étude à l'origine et à l'infini des solutions fondamentales	62
4,31	Étude de $f_0(z)$	62
4,32	Étude de $f_{1, (2n+1)q}(z)$ pour $n < 0$	63

	PAGES
4,33 Étude de $f_{1,(2n+1)q}(z)$ pour $n \geq 0$	63
4,331 Étude à l'origine	63
4,332 Étude à l'infini ($\mathcal{D}$, $\arg$)	64
4,333 Relation de $f_{1,(2n+1)q}(z)$ avec le développement de $\widehat{f}_1(z)$ en série asymptotique	67
4,34 Alternative régissant les solutions du problème	68
4,4 Application au problème des ondes liquides	68
4,41 Généralités	68
4,42 Étude des solutions physiquement acceptables	69
4,43 Formation d'ondes progressives se dirigeant vers la rive	70
4,5 Étude particulière du cas de la falaise verticale ($q = 1$)	71
4,50 Énoncé du problème	71
4,51 Solutions fondamentales	72
4,52 Étude des vitesses	73
4,53 Calcul de $\varphi(x, y) = \Re f(z)$	74
4,531 Cas de $f_0(z)$	74
4,532 Cas de $f_{1,-(2m-1)}(z)$ (solutions R)	75
4,533 Cas de $f_{1,(2n+1)}(z)$ (solutions S)	75
4,54 Étude de la surface libre	78
4,541 Fonction $\varphi_0(x)$	79
4,542 Fonction $\varphi_1(x)$	79
4,543 Fonction $\varphi_{1,2n+1}(x)$	80
4,544 Graphiques	80
4,55 Détermination directe de $\varphi(x, y)$	81
4,551 Énoncé du problème	81
4,552 Transformation du problème	81
4,553 Résolution du problème	82
4,554 Conclusion	84
4,6 Étude particulière de l'onde liquide bornée sur la rive	85
4,61 Développements de $f_0(z)$ et $\varphi_0(x)$ en séries de puissances	85
4,62 Expressions approchées de $\varphi_0(x)$	86
4,621 Approximation par un polynôme	86
4,622 Approximation par la théorie de l'eau peu profonde	87
4,623 Approximation par le comportement asymptotique	88
4,63 Exemples numériques	88
4,631 Plage inclinée à 45° ($q = 2$)	88
4,632 Plage inclinée à 30° ($q = 3$)	89
4,633 Plage inclinée à 6° ($q = 15$)	89
4,7 Étude particulière de l'onde liquide logarithmiquement infinie sur la rive ..	90
4,71 Expression explicite de $\varphi_1(x)$	91
4,72 Équation différentielle vérifiée par $\varphi_1(x)$	92
4,73 Développement en série asymptotique	93

4,74	Exemples numériques	93
4,741	Plage inclinée à 45° ($q = 2$)	93
4,742	Plage inclinée à 30° ($q = 3$)	94
4,743	Plage inclinée à 6° ($q = 15$)	94

CHAPITRE V

Étude du cas $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$

5,0	Généralités	96
5,1	Solution du problème homogène	97
5,2	Solution générale du problème — Solutions fondamentales	97
5,21	Intégrale générale de (5/1)	97
5,22	Traduction des conditions aux limites	100
5,23	Solutions fondamentales du problème	101
5,24	Autres représentations des solutions fondamentales	102
5,241	Réduction des solutions $f_{1,\lambda}(z)$	102
5,242	Étude des chemins d'intégration Γ_j	107
5,243	Simplification des chemins d'intégration Γ_j	111
5,244	Autre représentation de $f_{1,\lambda}(z)$	115
5,245	Application de la méthode de LAPLACE	119
5,3	Étude à l'origine et à l'infini des solutions fondamentales	121
5,31	Étude de $f_0(z)$	121
5,32	Étude de $f_{1,\lambda}(z)$	122
5,321	Lemmes	122
5,322	Étude pour $\lambda < 0$	122
5,323	Étude pour $\lambda > 0$	123
5,33	Conclusion	124
5,4	Recherche des solutions bornées à l'infini ($\mathfrak{D}$, arg) — Application au problème des ondes liquides	124
5,40	Généralités	124
5,41	Recherche d'une solution finie à l'origine et bornée à l'infini ($\mathfrak{D}$, arg) ..	125
5,411	Forme de la solution	125
5,412	Traduction de la condition $\mathfrak{B}$	125
5,413	Détermination des A_k	126
5,414	Étude à l'infini de $F_0(z)$	127
5,415	Conclusion	128
5,416	Représentation d'ISAACSON pour $F_0(z)$	128
5,417	Application	129
5,42	Recherche des solutions logarithmiquement infinies à l'origine et bornées à l'infini ($\mathfrak{D}$, arg)	130
5,421	Forme des solutions	130
5,422	Traduction des conditions imposées	130
5,423	Détermination des constantes	131
5,424	Conclusions	132
5,425	Représentation d'ISAACSON pour $F_1(z)$	133

	PAGES
5,43 Recherche des solutions les plus générales bornées à l'infini ($\mathcal{D}$, arg)...	134
5,431 Forme des solutions	134
5,432 Méthode de détermination des constantes.....	134
5,433 Étude du cas particulier $m = 1$	135
5,434 Étude du cas général (m quelconque)	136
5,435 Expression des solutions les plus générales bornées à l'infini ($\mathcal{D}$, arg)	143
5,436 Application aux ondes liquides	144
BIBLIOGRAPHIE	145

INTRODUCTION

Depuis une dizaine d'années, l'étude des ondes liquides de gravité irrotationnelles, en présence d'obstacles fixes donnés, a fait l'objet de nombreux travaux. Le problème, limité à la théorie linéaire et aux mouvements périodiques, se ramène à la recherche d'une fonction harmonique satisfaisant à des conditions aux limites de type mixte, recherche d'autant plus difficile que le nombre d'obstacles et le nombre de variables est plus élevé. En raison de sa simplicité relative, le cas d'*un seul* obstacle *plan*, incliné de l'angle α sur l'horizon et formant frontière du domaine liquide, a fait l'objet du plus grand nombre de travaux : il constitue une représentation approchée du mouvement de la mer au voisinage des côtes, quand on fait abstraction du déferlement.

Le mémoire de STOKER [12] ⁽¹⁾, dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 2 D ⁽²⁾, approfondit celui de MICHE [6] et met en évidence quelques résultats importants. Avec certaines hypothèses, STOKER démontre (th. 1) que : « pour former une onde progressive se dirigeant vers le rivage (onde figurative de la houle), il est nécessaire, en théorie linéaire, de supposer que le potentiel des vitesses admet une singularité ». Il place cette singularité au rivage, ce qui semble assez naturel; d'ailleurs, la position de la singularité doit nécessairement faire partie des hypothèses. Par contre, STOKER déclare qu'il est « naturel, pour des raisons physiques », de s'attendre à une singularité logarithmique, et il restreint dès l'abord son étude aux conséquences de ce choix assez arbitraire. Il démontre alors, moyennant certaines hypothèses sur les solutions, les deux théorèmes suivants : (th. 2) « Le problème admet *une seule* ⁽³⁾ solution, S_0 , finie sur la rive, et *une seule* ⁽³⁾ solution, S_1 , logarithmiquement infinie sur la rive, ces deux solutions étant déphasées de $\frac{\pi}{2}$ à l'infini sur la surface libre »; (th. 3) « A une amplitude et une phase données à l'infini sur la surface libre, il correspond *une seule* onde progressive se dirigeant vers le rivage, si on la suppose logarithmiquement infinie sur la rive. » STOKER donne en outre, pour les solutions S_0 et S_1 , des formules explicites qui permettent une discussion numérique. Dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 3 DR ⁽²⁾, il obtient des formules explicites pour les fonctions correspondantes, mais son résultat d'unicité est moins précis.

Les autres études, dont les principales figurent dans la bibliographie, ont surtout recherché les expressions explicites des solutions S_0 (finie sur la rive) et S_1

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

(2) Cf. les §§ 1,4 et 1,5 pour la définition de ces abréviations.

(3) A une constante réelle multiplicative près.

(logarithmiquement infinie sur la rive), qui généralisent celles de STOKER; elles ont été obtenues dans les cas suivants :

$$\alpha = \frac{p\pi}{2q} [p \text{ impair}, (p, q) = 1, p < 2q], 2D [5];$$

$$\alpha = \pi, 2D [2];$$

$$\alpha \text{ quelconque}, 2D [4], [7], [9];$$

$$\alpha \text{ quelconque}, 3DR [8], [9].$$

En règle générale, ces auteurs admettent les théorèmes 1 et 2 de STOKER, ainsi que l'hypothèse de la singularité logarithmique au rivage; quelques rares études ont été consacrées aux questions d'unicité (th. 2), aucune, à notre connaissance, n'a discuté la nature possible de la singularité.

La représentation même des solutions pose un problème. FRIEDRICH [1] ($\alpha = \frac{\pi}{2q}, 2D$), ISAACSON [4] (α quelconque, $2D$), PETERS [8] et ROSEAU [9] (α quelconque, $3DR$), ont donné pour S_0 et S_1 des formules extrêmement remarquables par leur concision ⁽¹⁾ à l'aide d'intégrales prises dans le plan complexe. Ces formules ne se rattachent, semble-t-il, à aucune théorie générale, et la forme du chemin d'intégration demande à être justifiée au même titre que la forme de l'intégrant. FRIEDRICH [1] se borne à vérifier ses formules; ISAACSON [4] laisse entendre qu'il les a obtenues en transformant celles de LEWY [5], mais ses explications sont très sommaires; ROSEAU [9] justifie la forme de l'intégrant, mais pose *a priori* le chemin d'intégration; PETERS [7], [8] cherche à justifier les deux, mais il échoue en ce qui concerne la forme du chemin pour S_1 .

Le travail que nous présentons ici s'efforce de répondre aux préoccupations précédentes dans le cas $\alpha = \frac{p\pi}{2q}, 2D$; il renferme :

1° la solution générale du problème aux limites, ce qui permet de préciser la nature de la singularité au rivage et les modifications à apporter aux résultats des études antérieures;

2° l'extension des théorèmes 1, 2, 3 de STOKER, en particulier la démonstration du fait que le théorème 3 est inexact pour une singularité non logarithmique au rivage, résultat qui nous paraît être la seule justification « physique » d'un choix préférentiel de la singularité logarithmique;

3° le passage direct des formules de STOKER et de LEWY à celles de FRIEDRICH et ISAACSON, dont le théorème 2 généralisé nous garantit qu'elles représentent les mêmes solutions.

Pour cette étude, il était nécessaire de reprendre entièrement les mémoires [5] et [12] et nous avons effectué, dans celles de leurs parties qui nous étaient utiles, diverses améliorations ou rectifications, dont les plus importantes sont signalées au cours de

(1) V. inf. les formules (4/23) et (4/24) pour $\alpha = \frac{\pi}{2q}, 2D$; (5/81), (5/82) et (5/90) pour $\alpha = \frac{p\pi}{2q}, 2D$.

notre exposé; nous nous sommes en outre efforcés, dans toute la mesure du possible, d'éviter le recours à des raisonnements ou résultats *a priori*.

Le chapitre premier rappelle les équations classiques du problème dans les deux cas 2 D et 3 DR, les hypothèses étant énoncées successivement de manière à restreindre peu à peu la généralité de l'étude.

Le chapitre II reprend l'exposé de la méthode de résolution de LEWY (appelée « méthode de réduction » par WEINSTEIN [13]), qui se révèle bien adaptée au but poursuivi, mais est malheureusement limitée au cas $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$. Cette méthode est exposée dans les deux cas 2 D et 3 DR, mais dans les chapitres suivants, nous nous limitons au cas 2 D.

Nous rattachons la méthode de LEWY à la notion de transformation fonctionnelle :

$$\mathfrak{S} f(z) = E(z) \quad (2\text{ D}) \quad \text{ou} \quad T \varphi(x, y) = \chi(x, y) \quad (3\text{ DR}),$$

notion qui joue un rôle important dans le problème étudié, puisque pour α quelconque, l'expression de S_0 et S_1 peut aussi (cf. [9]) être rattachée à des transformations fonctionnelles, dont les opérateurs seraient $\mathfrak{S}^{-1}$ et T^{-1} , $\mathfrak{S}$ et T étant alors inconnus. Pour $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, nous déterminons d'abord $\mathfrak{S}$ et T (qui sont ici des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants), puis l'expression générale de $E(z)$ et de $\chi(x, y)$, la méthode employée pour $\chi(x, y)$ étant la généralisation de celle dont se sert WEINSTEIN [13] dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 3 DR.

L'opérateur introduit *a priori* par STOKER [12] peut être retrouvé par la méthode de LEWY et même étendu au cas $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$; en le comparant avec l'opérateur de LEWY, on justifie *a posteriori* l'intérêt du prolongement de la fonction inconnue effectué par LEWY dès le début des calculs.

Le chapitre III contient les éléments nécessaires à la démonstration des formules d'ISAACSON. On démontre ainsi que les formules de STOKER et celles de LEWY se rattachent à la résolution des équations différentielles par la méthode classique de la variation des constantes; au contraire, les formules de FRIEDRICHS-ISAACSON sont liées à une représentation de certaines intégrales d'équations différentielles avec second membre par une intégrale dans le plan complexe avec noyau de LAPLACE, représentation qui, tout en se rattachant à un ordre d'idées connu, semble nouvelle.

Le chapitre IV applique ce qui précède au cas $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, 2 D, et contient, comme cas particuliers, les résultats de STOKER [12], relatifs aux mouvements 2 D en théorie linéaire. Mis à part le fait que nous obtenons la solution générale du problème aux limites, notre étude diffère de celle de STOKER principalement sur les points suivants : le chemin d'intégration à deux branches (§ 4,21) dont la considération, conjointement avec la définition (2/23) des a_j , simplifie la traduction des conditions aux limites; la démonstration des formules de FRIEDRICHS et leur généralisation, l'étude à l'infini des solutions par une méthode géométrique simple et leur développement en série asymptotique; la condition à l'infini très faible imposée finalement aux solutions (§ 4,41) et la démonstration des théorèmes 1, 2, 3 avec des hypothèses plus larges que celles de STOKER.

Dans l'étude de la falaise verticale, en dehors de l'étude par les variables complexes, nous avons déterminé le potentiel réel $\varphi(x, y)$ par une méthode directe analogue à celle utilisée par STOKER dans le cas 3 DR; la comparaison des calculs dans les deux cas permet de mieux concevoir les difficultés présentées par l'exposé purement réel (notamment pour la résolution des cas particuliers), difficultés qui se retrouveraient aggravées par l'introduction des fonctions de BESSEL dans le cas 3 DR.

Nous terminons ce chapitre par une méthode de calcul approché très précise de l'onde associée à S_0 et par quelques remarques concernant le calcul de l'onde associée à S_1 .

Le chapitre V est la généralisation pour $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, 2D du chapitre IV, sauf en ce qui concerne la falaise verticale et les calculs numériques; les résultats, qui comprennent ceux de LEWY [5] comme cas particuliers, sont toutefois beaucoup plus compliqués que ceux du chapitre IV.

Sans réussir à nous affranchir totalement de la distinction $p \equiv 1 \pmod{4}$ ou $p \equiv 3 \pmod{4}$ maintenue par LEWY jusqu'à la fin de son mémoire, nous avons obtenu pour la solution générale les formules (5/52), (5/55) et (5/58) qui en sont indépendantes, et qui permettent de poursuivre l'étude sans distinction de valeurs de p . Les calculs qui conduisent à ces formules rendent presque immédiate l'étude à l'infini, assez longue chez LEWY.

Le cas $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ présente des particularités (sommairement signalées par LEWY) qui nous obligent à modifier la condition à l'infini qui avait été imposée aux solutions dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2q}$; nous sommes ainsi conduits à chercher les solutions bornées à l'infini *dans tout le domaine liquide* (et non plus seulement en surface). Les méthodes de LEWY donnent facilement les solutions S_0 et S_1 , à propos desquelles nous démontrons les théorèmes 2 et 3 de STOKER et les formules d'ISAACSON. L'étude des solutions les plus générales bornées à l'infini dans le domaine liquide est nouvelle et assez difficile; elle permet de préciser dans quelle mesure le théorème 3 est inexact pour ces solutions.

Ce travail a été effectué sous la direction de M. VILLAT, à qui je tiens à exprimer ici toute ma gratitude pour la bienveillante attention dont il n'a cessé de faire preuve et pour le soutien constant qu'il m'a accordé. Je remercie également M. PONCIN pour avoir, malgré ses lourdes responsabilités, constamment suivi mon travail, ainsi que M. le Doyen PÉRÈS qui a bien voulu me faire l'honneur de se joindre à MM. VILLAT et PONCIN pour former mon jury de thèse, et dont le séminaire fut l'occasion de fructueux contacts. Que M. l'Ingénieur Général VERNOTTE veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour avoir accepté ce mémoire dans la collection qu'il dirige.

FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME ÉTUDIÉ

1,0

HYPOTHÈSES FONDAMENTALES

L'étude qui suit est relative à certains mouvements d'un fluide avec surface libre en présence d'obstacles fixes donnés.

Nous supposons que :

— le *fluide* est incompressible (liquide), parfait, soumis aux seules forces extérieures de pesanteur;

— le *mouvement* est continu et irrotationnel.

D'autres hypothèses seront ajoutées dans les paragraphes qui suivent.

1,1

ÉQUATIONS EXACTES DU MOUVEMENT

Équations indéfinies.

Elles résultent des théories classiques de l'hydrodynamique, d'après les hypothèses du § 1,0.

Si l'on rapporte le mouvement à trois axes rectangulaires $Oxyz$, où Oy est vertical ascendant; si la masse spécifique du liquide est prise égale à l'unité; si $p = p(x, y, z, t) \geq 0$ désigne la pression au point (x, y, z) à l'instant t ; si g est l'accélération de la pesanteur, le théorème de BERNOULLI (ou intégrale de l'énergie) fournit la relation :

$$\frac{1}{2}[(\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2 + (\Phi_z)^2] + \Phi_t + gy + p = C(t),$$

dans laquelle $\Phi(x, y, z, t)$ est le potentiel des vitesses défini à une fonction arbitraire de t près.

On peut choisir arbitrairement la pression de référence et la position du plan xOz ; en outre, en modifiant convenablement Φ on peut faire en sorte que $C(t) \equiv 0$. C'est ce que nous supposons fait dans ce qui suit, d'où la première équation :

$$(1/1) \quad \frac{1}{2}[(\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2 + (\Phi_z)^2] + \Phi_t + gy + p = 0.$$

L'équation de continuité est, d'autre part :

$$(1/2) \quad \Delta \Phi \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0,$$

ce qui montre que $\Phi(x, y, z, t)$ est une fonction *harmonique* par rapport aux variables d'espace x, y, z .

Conditions aux limites.

Elles résultent de l'existence de la surface libre et de celle des obstacles fixes.

Sur la *surface libre*, nous devons traduire que la pression reste constante, ce qui donne, d'après (1/1), en adoptant cette pression comme pression de référence nulle :

$$(1/3) \quad \frac{1}{2} [(\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2 + (\Phi_z)^2] + \Phi_t + gy = 0,$$

relation qui constitue, une fois Φ connue, l'équation de la surface libre, qu'on peut supposer résolue en y : $y = \eta(x, z, t)$. En particulier, à l'état de repos, cette surface est le plan xOz .

Ce sont les abaisséments et élévations du niveau de la surface libre qui constituent le phénomène des « ondes liquides » (« Water waves ») appelées aussi « ondes superficielles » (« Surface waves »). Compte tenu de l'hypothèse sur les forces extérieures, on appelle abrégativement les ondes obtenues « *ondes liquides de gravité* » (il serait plus correct de dire « ondulations de la surface d'un liquide pesant »).

Nous devons en outre exprimer que la surface libre reste, au cours du mouvement, constituée par les mêmes particules fluides. On sait que cette condition s'exprime par :

$$\frac{Dp}{Dt} = p_x \Phi_x + p_y \Phi_y + p_z \Phi_z + p_t = 0$$

(dérivée « totale ») à vérifier sur la surface libre (1/3). Compte tenu de la valeur de p tirée de (1/1), cette relation prend la forme :

$$(1/4) \quad \begin{aligned} & \Phi_x [\Phi_{xx} \Phi_x + \Phi_{yx} \Phi_y + \Phi_{zx} \Phi_z + \Phi_{tx}] \\ & + \Phi_y [\Phi_{xy} \Phi_x + \Phi_{yy} \Phi_y + \Phi_{yz} \Phi_z + \Phi_{yt} + g] + \Phi_z [\Phi_{xz} \Phi_x + \Phi_{yz} \Phi_y + \Phi_{zz} \Phi_z + \Phi_{tz}] \\ & + \Phi_{xt} \Phi_x + \Phi_{yt} \Phi_y + \Phi_{zt} \Phi_z + \Phi_{tt} = 0 \end{aligned}$$

à vérifier sur la surface libre (1/3).

Sur les *obstacles fixes donnés*, puisque le fluide est parfait, nous devons avoir :

$$(1/5) \quad \frac{d\Phi}{dn} = 0 \quad \text{sur les obstacles}$$

(dérivée normale).

Conditions supplémentaires.

D'autres conditions peuvent être éventuellement imposées à $\Phi(x, y, z, t)$, notamment si l'on veut que la ou les solutions obtenues soient « physiquement » acceptables (cf., par exemple, les §§ 4,41 et 5,40).

En résumé, nous voyons que la détermination des ondes liquides de gravité les plus générales en présence d'obstacles fixes donnés lorsque les hypothèses fondamentales sont satisfaites, se ramène à la résolution d'un problème de « potentiel » :

— « Trouver une fonction $\Phi(x, y, z, t)$ harmonique en x, y, z , qui vérifie les conditions aux limites : (1/4) sur la surface libre (1/3), et (1/5) sur les obstacles, et qui satisfait en outre à certaines conditions supplémentaires. »

La détermination de $\Phi(x, y, z, t)$ permet ensuite d'étudier d'autres propriétés du mouvement du fluide, par exemple : étude de la surface libre, vitesses des particules fluides, trajectoires de ces particules, pressions.

1,2

ÉQUATIONS LINÉARISÉES DU MOUVEMENT

La détermination de $\Phi(x, y, z, t)$ par les équations exactes du mouvement, exposée au § 1,1, se heurte à une difficulté majeure : la condition (1/4) non seulement n'est pas linéaire, mais elle doit être réalisée sur la surface libre (1/3) qui est elle-même une *inconnue* du problème. Aussi, l'étude des ondes liquides à partir des équations exactes n'a-t-elle été l'objet que de peu de recherches, dont les plus importantes sont celles de LEVI-CIVITA et STRUIK.

Toutes les autres recherches utilisent des méthodes approchées : la plus courante, que nous utiliserons ici, consiste à *linéariser* les équations exactes; une autre méthode est celle de *l'eau peu profonde* (« shallow water theory ») qui peut être linéaire ou non-linéaire.

L'hypothèse qui sert de base à la théorie linéaire est la suivante :

— « On admet que, dans les équations exactes, les carrés et les produits de dérivées partielles sont *négligeables* »,

ou encore, cela revient à supposer que $\Phi = \varepsilon \Phi_1$, où ε est une constante (dite « du premier ordre ») assez petite pour que les puissances de ε d'exposant ≥ 2 soient négligeables.

Dans ces conditions, (1/3) devient $\Phi_t + gy = 0$, équation de la surface libre : ceci montre que y est du premier ordre. Ainsi, la théorie linéaire s'applique aux ondulations de la surface libre de petite amplitude, dans lesquelles la surface libre diffère peu de sa position au repos, xOz . En outre, le développement de Φ_t en série entière par rapport à y ne renferme, mis à part le premier, que des termes d'ordre ≥ 2 , donc négligeables; on en déduit l'équation explicite de la surface libre sous la forme :

$$(1/6) \quad y = \eta(x, z, t) = -\frac{1}{g} [\Phi_t]_{y=0}.$$

De même, (1/4) devient $g \Phi_y + \Phi_u = 0$ pour $y = \eta(x, z, t)$. Mais, ici encore, on peut remplacer Φ_y pour $y = \eta$ par Φ_y pour $y = 0$, et de même dans Φ_u . La condition (1/4) devient la « condition de POISSON » :

$$(1/7) \quad g \Phi_y + \Phi_u = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0.$$

En résumé, les équations linéarisées du mouvement sont les équations (1/2), (1/7) et (1/5) avec, en plus, les éventuelles conditions supplémentaires. Une fois Φ connu, l'équation explicite de la surface libre est fournie par (1/6).

L'intérêt de la théorie linéaire réside non seulement dans le fait qu'elle fournit une solution approchée du problème (pour autant que la solution trouvée ne contredise pas l'hypothèse de linéarisation), mais encore dans les deux remarques suivantes :

— les nouvelles équations étant linéaires, on peut utiliser le principe de superposition des solutions;

— les conditions aux limites s'appliquent ici à des surfaces fixes ($y = 0$ et les obstacles).

Par commodité, nous dirons souvent que (1/7) est la condition « à la surface libre » et même que $y = 0$ est la « surface libre », sans que ces abus de langage puissent prêter à confusion.

1,3

MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

Dans ce qui précède, le temps t peut intervenir d'une manière quelconque. Nous limitant, dans ce qui suit, à la théorie linéaire, nous ferons en outre l'hypothèse que $\Phi(x, y, z, t)$ est une *fonction périodique de t* , éliminant de ce fait l'étude d'ondes non périodiques telles que l'onde solitaire (dont on sait d'ailleurs qu'elle représente un phénomène non linéaire).

Le théorème de FOURIER, joint au principe de superposition des solutions, permet de se limiter au cas où Φ est une fonction sinusoïdale de t ; soit :

$$(1/8) \quad \Phi(x, y, z, t) = e^{i\sigma t} \cdot \varphi(x, y, z) \quad (\sigma = \text{Cte})$$

en convenant de prendre soit la partie réelle, soit la partie imaginaire du second membre. Par abréviation, nous appellerons encore la fonction $\varphi(x, y, z)$, qui est seule à intervenir dans la suite, « potentiel des vitesses » du mouvement.

La condition de POISSON (1/7) devient alors :

$$\varphi_y - \frac{\sigma^2}{g} \cdot \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad y = 0;$$

mais la quantité positive $\frac{\sigma^2}{g}$ ayant les dimensions de l'inverse d'une longueur, nous pouvons la rendre égale à l'unité en adoptant pour x, y, z des variables sans dimension (cf. STOKER, [12], § 3). Nous supposerons ce choix fait dans toute la suite.

En appelant L.P le type de problème qui résulte des équations exactes du § 1,1 après leur linéarisation et l'hypothèse de périodicité (1/8) sur Φ , nous obtenons la formulation mathématique suivante de ce type L.P, avec des variables x, y, z sans dimension :

$$\begin{aligned} (1/9) \quad & \Delta \varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0; \\ (1/10) \quad & \varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{sur } y = 0; \\ (1/11) \quad & \frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \text{sur les obstacles fixes.} \end{aligned}$$

C'est donc un problème de potentiel avec des conditions aux limites de type mixte :

— sur une partie de la frontière du domaine liquide (obstacles), la condition est du type NEUMANN;

— sur l'autre partie (Ox , considérée abrégativement comme frontière du domaine liquide), la condition est du type de la chaleur, réserve faite de ce que le coefficient de proportionnalité de $\frac{d\varphi}{dn}$ (ici φ_y) à φ est ici positif.

La difficulté d'un tel problème dépend, *d'une part*, du nombre de coordonnées d'espace x, y, z qui intervient, *d'autre part*, de la nature et de la position des obstacles fixes donnés, au nombre desquels figurent les limites naturelles de la région limitée ou illimitée occupée par le liquide.

Surface libre dans un problème du type L.P.

Si nous reprenons pour un instant les variables initiales, (1/6) nous donne pour équation de la surface libre :

$$y = \eta(x, z, t) = -\frac{\sigma}{g} \cdot \varphi(x, 0, z) \cdot \begin{vmatrix} -\sin \sigma t, \\ \cos \sigma t. \end{vmatrix}$$

Par suite, à un instant t donné, l'amplitude du déplacement de la surface libre est proportionnelle à $\varphi(x, 0, z)$, que nous appellerons « potentiel à la surface ».

Lorsque t varie, la forme de la surface libre varie périodiquement avec le temps (période = $\frac{2\pi}{\sigma}$), les points $y = 0$ étant fixes dans l'espace. On a donc un phénomène d'« ondes stationnaires ».

Pour obtenir des « ondes progressives », figuratives de la houle, nous devons donc chercher puis superposer deux solutions « ondes stationnaires » distinctes, convenablement choisies. Pour les mouvements bidimensionnels, on obtient ce résultat avec deux ondes stationnaires telles que les nœuds de l'une correspondent aux crêtes ou creux de l'autre (cf. § 4,43).

1,4

MOUVEMENTS BIDIMENSIONNELS

Selon une définition classique, les mouvements *bidimensionnels* (en abrégé 2 D) sont ceux pour lesquels tous les phénomènes qui s'y rapportent sont identiques dans les plans perpendiculaires à une direction fixe, soit ici Oz ; en particulier, les ondes superficielles sont cylindriques à génératrices parallèles à Oz , et les obstacles fixes doivent vérifier la même condition.

La troisième coordonnée z n'intervenant plus, φ est une fonction de x, y à déterminer par les conditions suivantes (pour les problèmes L.P) :

$$(1/12) \quad \Delta \varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0;$$

$$(1/13) \quad \varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{sur } y = 0;$$

$$(1/14) \quad \frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \text{sur les obstacles fixes.}$$

Emploi du potentiel complexe.

Un caractère essentiel des problèmes L.P (2 D) est qu'on peut les formuler à l'aide des fonctions d'une variable complexe.

Regardons le plan (x, y) comme un plan complexe et appelons, selon l'usage $z = x + iy$ la variable complexe (aucune confusion n'étant à craindre avec la troisième coordonnée d'espace qui n'intervient plus ici); appelons en outre $\mathcal{D}$ le domaine liquide. Puisque, d'après (1/12), $\varphi(x, y)$ est une fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, on peut la regarder comme partie réelle d'une fonction $f(z)$, analytique dans $\mathcal{D}$, qui sera appelée « potentiel complexe »; comme l'on sait, $f(z)$ n'est ainsi déterminée qu'à une constante arbitraire imaginaire pure, que l'on pourra négliger dans la suite, le cas échéant. Les conditions aux limites (1/13) et (1/14) s'expriment aisément à l'aide de $f'(z) = \varphi_x - i\varphi_y$; désignant en outre par $-\alpha$ l'angle de l'horizontale Ox avec la tangente à l'obstacle au point z , nous obtenons pour les problèmes L.P (2 D) la formulation suivante à l'aide du potentiel complexe $f(z)$:

$$(1/15) \quad f(z) \text{ est analytique dans } \mathcal{D};$$

$$(1/16) \quad J[f'(z) + if(z)] = 0 \quad \text{pour } z \text{ réel } (y = 0);$$

$$(1/17) \quad J[e^{-i\alpha} \cdot f'(z)] = 0 \quad \text{sur les obstacles fixes.}$$

1,5

MOUVEMENTS TRIDIMENSIONNELS ET TRIDIMENSIONNELS RESTREINTS

Les problèmes L.P tridimensionnels vrais (3 D) dont l'énoncé est formé par les équations (1/9), (1/10), (1/11) sont actuellement à peu près inaccessibles au calcul.

Au contraire, certains problèmes tridimensionnels, où l'on suppose *a priori* que la fonction $\varphi(x, y, z)$ est de la forme $\exp(ikz) \cdot \varphi(x, y)$ (où k est une constante donnée), ont pu être résolus. Nous les appellerons problèmes « tridimensionnels restreints » (3 DR). Leur énoncé, à l'aide de $\varphi(x, y)$ seul, est le suivant :

$$(1/18) \quad \Delta \varphi - k^2 \varphi = 0;$$

$$(1/19) \quad \varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{sur } y = 0;$$

$$(1/20) \quad \frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \text{sur les obstacles fixes,}$$

lorsqu'on suppose que les obstacles fixes sont cylindriques à génératrices horizontales parallèles à Oz .

Ces problèmes 3 DR sont donc des problèmes aux limites de type mixte pour une équation aux dérivées partielles elliptique autre que l'équation de LAPLACE; cette dernière condition ne permet pas, bien que deux variables x, y seulement interviennent, de regarder $\varphi(x, y)$ comme la partie réelle d'une fonction analytique de $x + iy$.

1,6

NATURE ET POSITION DES OBSTACLES FIXES DONNÉS

La donnée d'un obstacle à trois dimensions imposerait de ne considérer que les mouvements 3 D; au contraire, si les obstacles sont des surfaces cylindriques à génératrices horizontales parallèles à Oz, il est possible d'étudier les mouvements 2 D, 3 DR, 3 D de difficulté croissante.

En fait, les recherches faites jusqu'ici ne concernent guère que le cas d'obstacles plans, parmi lesquels figure la frontière du domaine liquide $\mathcal{D}$. On a même, dans quelques

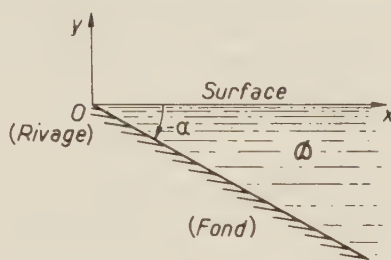


Fig. 1

cas, considéré plusieurs de ces obstacles, mais la difficulté augmente avec le nombre d'obstacles.

Nous nous bornerons à définir le seul cas qui sera traité dans ce qui suit : *un seul obstacle plan formant frontière de $\mathcal{D}$* . Si nous laissons de côté le cas classique du fond plan horizontal, nous considérons le plan $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$, incliné de l'angle $-\alpha$ sur le plan horizontal xOz .

Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, il constitue le fond de $\mathcal{D}$; on l'appelle aussi « plage ».

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on l'appelle « falaise verticale ».

Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, c'est une falaise « en surplomb ».

Si $\alpha = \pi$, les auteurs de langue anglaise l'appellent « dock »; c'est un obstacle plan semi-infini posé sur la surface libre au repos, mais fixe et non flottant.

En abrégé, pour tout α ($0 < \alpha \leq \pi$), nous appellerons « fond » l'obstacle plan ainsi défini; « rive » ou « rivage », la ligne Oz, intersection de l'obstacle avec la surface libre au repos (fig. 1).

Remarque.

Dans le cas du fond plan incliné, constituant le seul obstacle, le domaine liquide est illimité au moins dans la direction Ox. Si l'on suppose trouvée une onde progressive, figurative de la « houle », partant de l'infini sur Ox et se dirigeant vers le rivage Oz, la

question se pose de savoir ce qui se passera sur ce rivage. L'expérience montre que, selon l'inclinaison du fond (plage ou falaise), il y a soit réflexion avec formation d'ondes stationnaires, soit extinction du mouvement par déferlement. Nous admettrons, comme on le fait généralement, que la théorie utilisée ici ne permet pas d'étudier les phénomènes près du rivage, et nous laisserons de côté l'étude des ondes progressives à proximité de la rive.

1,7

OBJET DE L'ÉTUDE QUI SUIT

Dans les chapitres suivants, nous étudierons les *mouvements d'un liquide du type L.P.*, quand les obstacles fixes se réduisent à *un seul obstacle plan incliné*, formant frontière du domaine liquide $\mathcal{O}$.

Les équations correspondant à ce problème sont alors, d'après ce qui précède, les suivantes :

Mouvements 2 D.

1° *Variables réelles x, y . Potentiel $\varphi(x, y)$.*

$$(1/21) \quad \Delta \varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0;$$

$$(1/22) \quad \varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{sur } y = 0;$$

$$(1/23) \quad \frac{d\varphi}{dn} = \sin \alpha \cdot \varphi_x + \cos \alpha \cdot \varphi_y = 0 \quad \text{sur } x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha = 0.$$

2° *Variable complexe z . Potentiel complexe $f(z)$.*

$$(1/24) \quad f(z) \text{ analytique dans } \mathcal{O};$$

$$(1/25) \quad \Re [f'(z) + if(z)] = 0 \quad \text{pour } z \text{ réel};$$

$$(1/26) \quad \Re [e^{-i\alpha} f'(z)] = 0 \quad \text{pour } z = re^{-i\alpha}, r \text{ réel (fond)}.$$

Mouvements 3 DR.

Variables réelles x, y . Potentiel $e^{ikz} \cdot \varphi(x, y)$.

$$(1/27) \quad \Delta \varphi - k^2 \varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - k^2 \varphi = 0;$$

$$(1/28) \quad \varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{sur } y = 0;$$

$$(1/29) \quad \frac{d\varphi}{dn} = \sin \alpha \cdot \varphi_x + \cos \alpha \cdot \varphi_y = 0 \quad \text{sur } x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha = 0.$$

Remarque.

La condition (1/26) pourrait être remplacée par :

$$(1/26') \quad \Re f(z) = 0 \quad \text{pour } z = re^{-i\alpha}, r \text{ réel (fond)},$$

comme on le verra au § 2,11; ceci n'entraînant que des modifications minimales de calcul dans la suite, nous conserverons (1/26).

MÉTHODE GÉNÉRALE DE RÉOLUTION DU PROBLÈME

2,0

GÉNÉRALITÉS

Pour résoudre le problème dont les différents énoncés ont été donnés au § 1,7, nous appliquerons aux fonctions inconnues $\varphi(x, y)$ [resp $f(z)$] une *transformation fonctionnelle linéaire* :

$$\chi(x, y) = T \cdot \varphi(x, y) \quad \text{resp} \quad E(z) = \mathfrak{E} \cdot f(z),$$

choisie à partir des conditions aux limites imposées à $\varphi(x, y)$ [resp $f(z)$] de telle manière que l'on puisse déterminer, moyennant une hypothèse supplémentaire énoncée au § 2,2, les fonctions transformées $\chi(x, y)$ [resp $E(z)$] dans le domaine $\mathcal{D}$. La détermination des fonctions inconnues $\varphi(x, y)$ [resp $f(z)$] sera ainsi ramenée à l'*inversion* des transformations fonctionnelles précédentes.

Suivant la méthode de LEWY [5], nous montrerons que, dans le cas $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$ (p impair, premier avec q et inférieur à $2q$) on peut trouver, comme opérateurs T (resp $\mathfrak{E}$), des *opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants*.

2,1

FORMATION DES OPÉRATEURS T ET $\mathfrak{E}$

Nous commencerons par former l'opérateur $\mathfrak{E}$.

2,11 Prolongement préalable de $f(z)$.

Au lieu de se servir des conditions aux limites sous la forme (1/25), (1/26), LEWY profite de (1/26) pour effectuer le prolongement analytique de $f(z)$. Nous montrerons l'intérêt de ce prolongement au § 2,23. Nous allons l'étudier ici plus en détail que ne le fait LEWY, en vue des applications ultérieures (§ 2,21).

Rappelons au préalable quelques notations classiques :

Appelant $z = x + iy$ la variable complexe, nous désignerons par $\bar{z} = x - iy$ le conjugué de z . Si $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ est une fonction de z , $\overline{f(z)} = \varphi(x, -y) + i\psi(x, -y)$ désigne la valeur de $f(z)$ quand on remplace z par $\bar{z}$; $\overline{f(z)} = \varphi(x, y) - i\psi(x, y)$ est le conjugué de $f(z)$; $f(z) = \varphi(x, -y) - i\psi(x, -y)$

est la fonction de z déduite de $f(z)$ par remplacement de chaque coefficient de l'expression $f(z)$ par son conjugué. On remarque que :

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad \text{et que} \quad \frac{d}{dz} f(z) = f'(z).$$

Ceci posé, désignons par z et $z_1 = ze^{-2i\alpha}$, deux points symétriques par rapport au fond Ot ; $\mathcal{O}'$ le domaine décrit par z_1 quand z décrit $\mathcal{O}$ (fig. 2).

D'après le principe de symétrie de SCHWARZ, la condition (1/26) permet de prolonger la fonction $e^{-i\alpha} f'(z)$ de telle sorte que :

$$e^{-i\alpha} f'(z_1) = e^{-i\alpha} \cdot \overline{f'(z)},$$

ou encore :

$$f'(z) = e^{-2i\alpha} f'(ze^{-2i\alpha}).$$

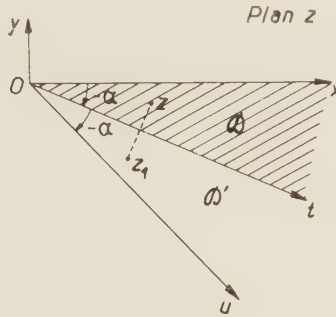


Fig. 2

Remplaçons z par $\overline{z}$; il vient :

$$f'(z) = e^{-2i\alpha} \cdot \overline{f'(ze^{-2i\alpha})}.$$

Par intégration, on en déduit :

$$\overline{f(z)} = f(ze^{-2i\alpha}) + \text{Cte} \quad \text{ou} \quad \overline{f(\overline{z})} = f(z_1) + \text{Cte},$$

la constante étant imaginaire pure, donc négligeable, comme on le voit en amenant z sur Ot .

Par dérivation, on obtient de façon générale :

$$f^{(k)}(z) = e^{-2ki\alpha} \cdot \overline{f^{(k)}(ze^{-2i\alpha})}$$

et, en remplaçant z par $\overline{z}$, on en conclut que les relations de prolongement sont :

$$(2/1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(z_1) = f(z), \\ f'(z_1) = e^{2i\alpha} \cdot \overline{f'(z)}, \\ f''(z_1) = e^{4i\alpha} \cdot \overline{f''(z)}, \\ \dots\dots\dots, \\ f^{(q)}(z_1) = e^{2qi\alpha} \cdot \overline{f^{(q)}(z)}. \end{array} \right.$$

2,12 Transformation des conditions aux limites.

Mettant à profit (1/26) pour prolonger $f(z)$ comme on vient de le faire, on déduit de (1/25) la condition suivante applicable sur Ou , symétrique de Ox par rapport à Ot :

$$(2/2) \quad \mathfrak{J} [-e^{-2i\alpha} f'(z) + if(z)] = 0 \quad \text{pour} \quad z = re^{-2i\alpha} \quad (\text{sur } Ou).$$

On le voit aisément en plaçant z sur Ox dans (2/1), donc z_1 sur Ou .

Considérons alors $\mathfrak{J} \left(\frac{d}{dz} + i \right) f(z)$; d'après (1/25) c'est, sur Ox , une fonction de x identiquement nulle. Si donc on la dérive un nombre quelconque de fois par rapport à x , le résultat sera aussi identiquement nul; d'après la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{J} f(z) = \mathfrak{J} \frac{df}{dz},$$

nous aurons :

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \mathfrak{J} \left(\frac{d}{dz} + i \right) f(z) = \mathfrak{J} \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{d}{dz} + i \right) f(z).$$

Plus généralement, si $P(\zeta) \equiv b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots + b_{s-1} \zeta^{s-1}$ est un polynôme en ζ à coefficients réels, nous aurons :

$$(1/25') \quad P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathfrak{J} \left(\frac{d}{dz} + i \right) f(z) = \mathfrak{J} P \left(\frac{d}{dz} \right) \left(\frac{d}{dz} + i \right) f(z) = 0 \quad (\text{sur } Ox).$$

Considérons maintenant $\mathfrak{J} \left(-e^{-2i\alpha} \frac{d}{dz} + i \right) f(z)$; d'après (2/2), c'est, sur Ou ($z = re^{-2i\alpha}$), une fonction de r identiquement nulle, qu'on peut dériver en r un nombre quelconque de fois, suivant le schéma :

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathfrak{J} f(z) = \mathfrak{J} e^{-2i\alpha} \frac{df}{dz},$$

conséquence de la relation plus générale $\frac{d}{dL} \mathfrak{J} f(z) = \mathfrak{J} e^{i\beta} f'(z)$, où L est la direction d'angle polaire β par rapport à Ox . Plus généralement, $P(\zeta)$ désignant le même polynôme que précédemment :

$$(2/2') \quad P \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \mathfrak{J} \left(-e^{-2i\alpha} \frac{d}{dz} + i \right) f(z) = \mathfrak{J} P \left(e^{-2i\alpha} \frac{d}{dz} \right) \left(-e^{-2i\alpha} \frac{d}{dz} + i \right) f(z) = 0 \quad (\text{sur } Ou).$$

2,13 Détermination de l'opérateur différentiel $\mathfrak{C}$.

Suivant la méthode utilisée par LEWY, nous chercherons à déterminer $P(\zeta)$ par la condition :

$$(2/3) \quad P(\zeta) \cdot (\zeta + i) \equiv P(\zeta e^{-2i\alpha}) (-\zeta e^{-2i\alpha} + i).$$

Détermination du polynôme $P(\zeta)$.

$P(\zeta)$ n'étant évidemment défini qu'à un facteur réel multiplicatif près, nous prendrons $b_0 = 1$, donc :

$$P(\zeta) = 1 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots + b_j \zeta^j + \dots + b_{s-1} \zeta^{s-1}.$$

Reportons dans (2/3) et identifions; on trouve :

$$(2/4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + i b_1 = e^{-2i\alpha} (-1 + i b_1), \\ b_1 + i b_2 = e^{-4i\alpha} (-b_1 + i b_2), \\ \dots\dots\dots, \\ b_{j-1} + i b_j = e^{-2ji\alpha} (-b_{j-1} + i b_j), \\ \dots\dots\dots, \\ b_{s-1} = -e^{-2si\alpha} \cdot b_{s-1}. \end{array} \right.$$

La relation générale s'écrit :

$$b_j (1 - e^{-2ij\alpha}) = i (1 + e^{-2ij\alpha}) b_{j-1}$$

et, sous réserve que $e^{-2ij\alpha} \neq 1$, on obtient :

$$(2/5) \quad b_j = b_{j-1} \cdot \cotg j \alpha,$$

d'où, compte tenu de $b_0 = 1$, la valeur de b_j :

$$(2/6) \quad b_j = \cotg \alpha \cdot \cotg 2 \alpha \dots \cotg j \alpha,$$

qui nous montre bien que les coefficients successifs du polynôme $P(\zeta)$ sont *réels*, comme nous l'avions exigé.

Discussion.

D'une part, pour que le calcul des b_j puisse être poursuivi, il est nécessaire que $e^{-2ij\alpha} \neq 1$; d'autre part, pour que $P(\zeta)$ soit un polynôme de degré $s - 1$, il faut, d'après la dernière relation (2/4), que :

$$e^{-2si\alpha} = -1.$$

Cette dernière condition nécessite que $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, p étant impair; nous pouvons supposer que p et q sont premiers entre eux; en outre, $p < 2q$ à cause des conditions géométriques du problème mais $p \neq 2q$, car les calculs précédents ne sont pas valables pour $\alpha = \pi$. Nous résumerons dans la suite ces conditions en disant que q étant donné, p est un entier « *admissible* ».

Supposons donc $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, p admissible; on voit facilement que les conditions précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} e^{-2ij\alpha} &= 1 & \text{pour} & \quad j = 2q, 4q, \dots, \\ e^{-2ij\alpha} &= -1 & \text{pour} & \quad j = q, 3q, \dots \end{aligned}$$

Il en résulte que le calcul des coefficients $b_1, b_2, \dots, b_{q-1}$, est toujours possible et que ces coefficients ne sont pas nuls. On peut arrêter $P(\zeta)$ soit à b_{q-1} , soit à $b_{3q-1}, \dots$. Mais, si l'on poursuit le calcul des b_j pour $j \geq q$, on constate que $b_j = 0$ pour $j = q, q+1, \dots, 2q-1$, que b_{2q} n'est pas déterminé et que :

$$b_{2q+l} = b_{2q} \cdot b_l \quad (l = 1, 2, \dots, q-1);$$

par conséquent, le polynôme $P(\zeta)$ arrêté à b_{3q-1} ne serait autre que le polynôme correspondant arrêté à b_{q-1} , multiplié par $1 + b_{2q}$, c'est-à-dire une constante réelle arbitraire. Nous n'avons donc, en fait, qu'un seul polynôme $P(\zeta)$, si l'on fait abstraction de ce facteur réel multiplicatif arbitraire; ce polynôme est de degré $q-1$, à coefficients réels et non nuls; son expression est :

$$(2/7) \quad P(\zeta) \equiv 1 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots + b_{q-1} \zeta^{q-1},$$

les b_j étant définis par (2/6) avec $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$.

Étude des coefficients b_j .

On peut profiter de la relation $\cotg(q-j)\alpha \cdot \cotg j\alpha = 1$ pour simplifier l'expression des b_j , mais ceci nécessite que nous distinguions deux cas :

Premier cas : q impair.

Nous avons alors :

$$b_{q-j} = b_{j-1}.$$

Deuxième cas : q pair.

La relation est, cette fois, $b_{q-j} = b_{j-1} \cdot \cotg\left(p\frac{\pi}{4}\right)$, et :

$$\cotg p\frac{\pi}{4} \begin{cases} = 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ = -1 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Ainsi, dans le polynôme $P(\zeta)$ les coefficients extrêmes et équidistants des extrêmes sont :

- égaux pour q impair ou q pair avec $p \equiv 1 \pmod{4}$;
- opposés pour q pair avec $p \equiv 3 \pmod{4}$.

En particulier, pour $p = 1$ (q quelconque), on a :

$$b_{q-1} = b_{j-1} \quad \text{donc} \quad b_{q-1} = b_0 = 1.$$

Les coefficients b_j sont ici tous réels et positifs. Pour q impair il y a un b_j maximum pour $j = \frac{q-1}{2}$; pour q pair, il y en a deux pour $j = \frac{q}{2} - 1$ et $j = \frac{q}{2}$.

Recherche des zéros de $P(\zeta)$.

Puisque les b_j sont réels, les zéros de $P(\zeta)$ sont deux à deux conjugués. Nous utiliserons le fait démontré dans la discussion qui précède selon lequel :

$$e^{-2ij\alpha} \neq -1 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots, q-1.$$

Utilisons (2/3). D'après le second membre, $\zeta = ie^{2i\alpha}$ est un zéro de P , si cette valeur est différente de $-i$, soit pour $q > 1$. Par suite, $\zeta = -ie^{-2i\alpha}$ est aussi un zéro de P ; remplaçant ζ par cette valeur dans (2/3) on voit que $\zeta = -ie^{-4i\alpha}$ est un zéro de P pour $q > 2$; on remplace à nouveau ζ par cette valeur dans (2/3), etc., jusqu'à $\zeta = -ie^{-2(q-1)i\alpha}$. L'ensemble des zéros de $P(\zeta)$ est donc :

$$-ie^{-2i\alpha}, -ie^{-4i\alpha}, \dots, -ie^{-2(q-1)i\alpha},$$

car ces valeurs sont distinctes, puisque $e^{-2ij\alpha} \neq 1$ pour $j = 1, 2, \dots, q-1$ (cf. Discussion). Nous prendrons les conjugués et poserons :

$$(2/8) \quad \rho_j = ie^{ij\rho} \quad (j = 1, 2, \dots, q-1).$$

L'étude de ces quantités ρ_j sera reprise plus en détail au § 2,4.

Nous pouvons donc écrire :

$$P(\zeta) = \prod_{j=1}^{q-1} (\zeta - \rho_j).$$

Forme finale de l'opérateur $\mathfrak{G}$.

Posons $R(\zeta) \equiv P(\zeta) \cdot (\zeta + i)$; nous aurons :

$$R(\zeta) \equiv \prod_{j=1}^q (\zeta - \rho_j),$$

si nous convenons à partir de maintenant d'appliquer (2/8) également au cas $j = q$, soit $\rho_q = -i$.

Nous choisirons comme opérateur $\mathfrak{G}$ l'opérateur différentiel :

$$(2/9) \quad \mathfrak{G} \equiv R \left(\frac{d}{dz} \right) = \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right).$$

Si l'on rapproche alors (1/25'), (2/2'), (2/3) et (2/9), on voit que $E(z) = \mathfrak{G}f(z)$ sera telle que $\mathfrak{G}E(z) = 0$ à la fois sur Ox et sur Ou .

Remarque.

La méthode ici utilisée ne nécessite nullement que dans (1/25') et (2/2') les polynômes utilisés soient les mêmes, pourvu que leurs coefficients restent *réels*. Si, dans (2/2') on remplace $P(\zeta)$ par un autre polynôme $Q(\zeta)$ à coefficients réels, on est amené à résoudre, au lieu de (2/3) :

$$(2/3') \quad P(\zeta)(\zeta + i) \equiv Q(\zeta e^{-2i\alpha})(-\zeta e^{-2i\alpha} + i).$$

C'est ce que fait LEWY [5]; c'est ce que nous ferons au § 2,23 dans un cas analogue. Toutefois, ici, on trouve que la condition de réalité des coefficients de P et Q entraîne $P \equiv Q$; nous avons profité *a priori* de ce résultat pour simplifier les calculs.

2,14 Détermination de l'opérateur différentiel T .

Cas des mouvements 2 D.

Ceci correspond à la formulation du problème par rapport à $\varphi(x, y)$: équations (1/21), (1/22), (1/23).

Nous nous servirons de ce qui précède, en explicitant $\mathfrak{T}f(z)$ d'après (2/9), soit :

$$\mathfrak{T}f(z) = if(z) + (1 + ib_1) \frac{df}{dz} + (b_1 + ib_2) \frac{d^2 f}{dz^2} + \dots + b_{q-1} \frac{d^q f}{dz^q}.$$

En utilisant le fait que si $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, nous avons $\frac{df}{dz} = \varphi_x - i\varphi_y$; en général, $\frac{d^k f}{dz^k} = \varphi_{x^k} - i\varphi_{x^{k-1}y}$; il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\mathfrak{T}f(z) &\equiv \varphi - \varphi_y + b_1(\varphi_x - \varphi_{xy}) + \dots + b_{q-1}(\varphi_{x^{q-1}} - i\varphi_{x^{q-1}y}) \\ &\equiv \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots + b_{q-1} \frac{\partial^{q-1}}{\partial x^{q-1}}\right)(\varphi - \varphi_y) \\ &\equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x, y) \equiv -T \cdot \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Mais l'opérateur $\mathfrak{T}$ est tel que toute fonction analytique $f(z)$, qui vérifie les conditions (1/25), (1/26), vérifie, quand on la prolonge suivant (2/1), $\mathcal{J}\mathfrak{T}f(z) = 0$ sur Ox et sur Ou .

D'où, dans le domaine réel, le résultat analogue :

« Toute fonction $\varphi(x, y)$ harmonique qui vérifie les conditions aux limites (1/22), (1/23), prolongée dans $\mathcal{O}'$ de manière qu'en deux points symétriques par rapport à Ot la fonction prolongée prenne la même valeur, satisfait à :

$$(2/10) \quad T \cdot \varphi(x, y) \equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1\right) \varphi(x, y) = 0 \quad \text{sur} \quad Ox \text{ et } Ou. »$$

Extension aux mouvements 3 DR.

Si l'on remarque que les conditions aux limites (1/28), (1/29) sont identiques à (1/22), (1/23), on peut utiliser le résultat qu'on vient d'obtenir dans le cas 2 D, en procédant *a priori*.

Prolongeons la fonction inconnue $\varphi(x, y)$ par symétrie par rapport à Ot , ce qui est en accord avec (1/29), si l'on considère l'expression $T\varphi(x, y)$ définie par (2/10). Il est évident que $T\varphi(x, y) = 0$ sur Ox est une conséquence de (1/28); on pourrait vérifier que $T\varphi(x, y) = 0$ sur Ou est une conséquence de (1/28), (1/29) et de la relation de prolongement. Cette vérification, *indépendante de l'équation (1/21) ou (1/27)*, vaudrait pour 2 D et 3 DR; elle est donc inutile puisqu'on sait que le résultat est vrai pour 2 D. Il en résulte que (2/10) est également valable pour 3 DR.

2,2 DÉTERMINATION DES TRANSFORMÉES FONCTIONNELLES $\mathfrak{T}f(z)$ ET $T\varphi(x, y)$ DANS $\mathcal{Q}$

2,21 Détermination de $\mathfrak{T}f(z)$ (mouvements 2D).

Nous posons $E(z) = \mathfrak{T}f(z)$, et nous commençons par étudier les propriétés de $E(z)$ qui nous serviront à le déterminer.

Propriétés de $E(z)$.

1° $E(z)$ est une *fonction analytique* de z dans l'angle (Ox, Ou) : cela résulte de (1/24) et (2/9);

2° $E(z)$ prend des *valeurs réelles* sur Ox et sur Ou : cela résulte de la construction même de l'opérateur $\mathfrak{T}$;

3° en deux points z et z_1 symétriques par rapport à Ot , les valeurs de $E(z)$ sont liées par la relation :

$$(2/11) \quad E(z_1) = -\overline{E(z)}.$$

Si l'on utilise l'expression développée de $E(z)$ donnée au § 2,14 et les relations de prolongement (2/1), on obtient :

$$E(z_1) = if(z) + (1 + ib_1) e^{2i\alpha} \cdot \overline{f'(z)} + (b_1 + ib_2) e^{4i\alpha} f''(z) + \dots + b_{q-1} e^{2qi\alpha} \cdot \overline{f^{(q)}(z)}$$

d'où, en transformant les relations (2/4) sur le modèle :

$$e^{2ij\alpha} (b_{j-1} + ib_j) = -b_{j-1} + ib_j = -(b_{j-1} + ib_j),$$

on trouve (2/11).

Hypothèse supplémentaire sur $f(z)$.

Les propriétés précédentes ne peuvent servir à déterminer $E(z)$ en l'absence de toute hypothèse sur ses singularités.

Nous ferons sur $f(z)$ l'hypothèse suivante qui s'ajoute à celles déjà faites au chapitre premier :

« *Le potentiel complexe $f(z)$, analytique dans $\mathcal{D}$, n'admet dans ce domaine pas d'autre singularité à distance finie que l'origine.* »

Contrairement à ce que font tous les auteurs, nous ne ferons aucune hypothèse sur la nature de cette singularité; nous déterminerons dans ce qui suit quelles sont les singularités admissibles à l'origine.

La même propriété a lieu pour $E(z)$ et s'ajoute à celles obtenues ci-dessus.

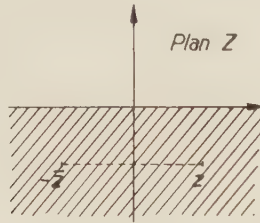


Fig. 3

Expression de $E(z)$.

Faisons la représentation conforme de l'angle (Ox, Ou) sur le demi-plan inférieur d'un plan Z à l'aide de la fonction :

$$Z = z^{\frac{q}{p}},$$

la détermination de cette puissance étant celle qui est réelle pour z réel. Aux points z et z_1 symétriques par rapport à Ot , correspondent des points Z et $-Z$ symétriques par rapport à l'axe imaginaire du plan Z (fig. 3). $E(z)$ devient ainsi une fonction de Z , analytique dans le demi-plan inférieur, sans autre singularité à distance finie que l'origine, réelle sur l'axe réel, telle en outre que :

$$E(-Z) = -E(Z).$$

Si l'on applique le principe de symétrie de SCHWARZ, la fonction prolongée sera uniforme, analytique dans tout le plan, sans autre singularité à distance finie que l'origine, prenant des valeurs conjuguées pour Z et $\bar{Z}$, opposées pour Z et $-Z$.

On peut donc développer cette fonction en série de LAURENT :

$$E(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_n}{Z^n},$$

la série étant absolument et uniformément convergente pour $Z \neq 0$.

On voit ensuite que :

$$\begin{array}{llll} E(\bar{Z}) = \overline{E(Z)} & \text{entraîne} & \beta_n = \beta_n, & \text{donc } \beta_n \text{ réel,} \\ E(-Z) = -E(Z) & \text{entraîne} & \beta_{2n} = 0, & n \text{ doit être impair.} \end{array}$$

Posant $\beta_{2n+1} = B_n$, on obtient donc :

$$(2/12) \quad E(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{B_n}{z^{(2n+1)\frac{q}{p}}}.$$

2,22 Détermination de $T \varphi(x, y)$ (mouvements 3 DR).

Nous poserons ici :

$$\chi(x, y) = T \varphi(x, y).$$

Propriétés de $\chi(x, y)$.

1° $\chi(x, y)$ est, dans l'angle (Ox, Ou) , une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(1/27) \quad \Delta \chi - k^2 \chi = 0.$$

Cela résulte de (1/27) et du fait que T est un opérateur linéaire, d'après (2/10);

2° $\chi(x, y) = 0$ sur Ox et sur Ou .

On l'a vu au § 2,14;

3° en deux points (x, y) et (x_1, y_1) symétriques par rapport à Ot , $\chi(x, y)$ prend la même valeur.

Car si l'on revient pour un instant aux mouvements 2 D, on a :

$$\chi(x, y) = -E(z),$$

ce qui, d'après (2/11), donne :

$$\chi(x_1, y_1) = \chi(x, y).$$

On étend ce résultat à 3 DR, en remarquant que ce résultat est, en fait, une conséquence des conditions aux limites (1/28), (1/29) et de la relation de prolongement de $\chi(x, y)$ (cf. § 2,14).

Hypothèse supplémentaire sur $\varphi(x, y)$.

Comme au § 2,21, nous ajouterons aux hypothèses déjà faites sur $\varphi(x, y)$ au chapitre premier, la suivante :

« La fonction $\varphi(x, y)$, solution de (1/27) dans $\mathcal{D}$, n'admet, dans ce domaine, pas d'autre singularité à distance finie que l'origine. »

Il en sera de même de $\chi(x, y)$, propriété qui s'ajoute aux trois précédentes.

Expression de $\chi(x, y)$.

Nous supposons toujours $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$. La méthode du § 2,21 n'est plus ici applicable. Nous utiliserons une méthode basée sur un développement en série de fonctions propres (cf. WEINSTEIN [13]).

Si nous passons en coordonnées polaires, notre problème devient :

« Trouver les fonctions $\chi(r, \theta)$, solutions de l'équation :

$$\chi_{rr} + \frac{1}{r}\chi_r + \frac{1}{r^2}\chi_{\theta\theta} - k^2\chi = 0,$$

régulières dans le domaine $-2\alpha \leq \theta \leq 0$, pour tout $r > 0$, mais *non nul*, nulles pour $\theta = 0$ et $\theta = -2\alpha$, quel que soit $r \neq 0$, telles enfin que :

$$\chi(r, \theta) \equiv \chi(r, -2\alpha - \theta),$$

pour tous r et θ . »

Pour cela, nous considérons les fonctions $\Theta(\theta)$, solutions du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda \Theta = 0, \\ \Theta = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = -2\alpha \quad \text{et} \quad \theta = 0. \end{array} \right.$$

Un ensemble *complet* de fonctions propres de ce système est :

$$\Theta = \sin n \mu' \theta \quad \text{pour} \quad \lambda = n^2 \mu'^2 \quad \left(\mu' = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{q}{p} \right).$$

On sait alors que toute fonction $\chi(r, \theta)$ qui, pour r fixé, vérifie les mêmes conditions aux limites que $\Theta(\theta)$, qui est en outre pourvue de dérivées partielles des deux premiers ordres continues, peut être développée en série absolument et uniformément convergente (pour tout $r > 0$, mais *non nul*) procédant suivant les fonctions propres précédentes, soit :

$$\chi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) \cdot \sin n \mu' \theta,$$

avec :

$$c_n(r) = \frac{1}{\alpha} \int_{-2\alpha}^0 \chi(r, \theta) \sin n \mu' \theta \cdot d\theta.$$

Pour obtenir les $c_n(r)$, on cherche une équation différentielle vérifiée par ces fonctions. On obtient :

$$\begin{aligned} c''_n(r) + \frac{1}{r}c'_n(r) &= \frac{1}{\alpha} \int_{-2\alpha}^0 \left(\chi_{rr} + \frac{1}{r}\chi_r \right) \sin n \mu' \theta \, d\theta = \frac{1}{\alpha} \int_{-2\alpha}^0 \left(k^2\chi - \frac{1}{r^2}\chi_{\theta\theta} \right) \sin n \mu' \theta \, d\theta \\ &= k^2 c_n(r) - \frac{1}{\alpha r^2} \int_{-2\alpha}^0 \chi_{\theta\theta} \cdot \sin n \mu' \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale se transforme par des intégrations par parties en $-n^2 \mu'^2 \cdot \alpha c_n(r)$, les termes tout intégrés disparaissant en vertu des conditions aux limites imposées soit à $\chi(r, \theta)$, soit aux fonctions propres. Finalement, l'équation différentielle est :

$$c_n''(r) + \frac{1}{r} c_n'(r) - \left(k^2 + \frac{n^2 \mu'^2}{r^2} \right) c_n(r) = 0.$$

C'est une équation de BESSEL, dont l'intégrale générale est :

$$c_n(r) = \alpha_n I_{n\mu'}(kr) + \beta_n K_{n\mu'}(kr),$$

α_n, β_n étant des constantes réelles arbitraires; I et K les fonctions de BESSEL modifiées de première et deuxième espèces.

Nous avons ensuite, par un calcul facile :

$$\chi(r, \theta) - \chi(r, -2\alpha - \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_{2n} I_{2n\mu'}(kr) + \beta_{2n} K_{2n\mu'}(kr) \} \sin 2n\mu'\theta = 0,$$

ceci pour tous r et θ ; d'où $\alpha_{2n} = \beta_{2n} = 0$ d'après la convergence uniforme de la série et l'orthogonalité des fonctions propres.

Posant $\alpha_{2n+1} = A_n$ et $\beta_{2n+1} = B_n$, nous aurons donc :

$$(2/13) \quad \chi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n I_{(2n+1)\mu'}^q(kr) + B_n K_{(2n+1)\mu'}^q(kr) \right] \sin \left[(2n+1) \frac{q}{p} \theta \right].$$

Remarque.

La méthode s'applique au cas 2 D, en faisant $k = 0$. L'équation différentielle aux $c_n(r)$ est une équation d'EULER, dont l'intégrale générale est :

$$c_n(r) = \alpha_n r^{n\mu'} + \frac{\beta_n}{r^{n\mu'}}.$$

On trouve ainsi :

$$\chi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{B_n}{r^{(2n+1)\mu'}} \sin(2n+1) \frac{q}{p} \theta$$

en accord avec (2/12), d'après :

$$\chi(x, y) = \frac{1}{2} E(z).$$

2,23 Comparaison avec la méthode de STOKER.

STOKER [12], dans le cas 2 D et $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, donne sans démonstration l'expression d'un opérateur $\mathfrak{E}_1$ obtenu directement à partir de (1/25), (1/26). Nous allons montrer très sommairement que les méthodes qui précèdent permettent de retrouver $\mathfrak{E}_1$, de l'étendre au cas $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, et que les résultats obtenus ne diffèrent pas des précédents.

Recherche de l'opérateur $\mathfrak{T}_1$.

On transforme d'abord (1/25), (1/26) comme au § 2,12 en :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} P_1 \left(\frac{d}{dz} \right) \left(\frac{d}{dz} + i \right) f(z) &= 0 \quad \text{sur} \quad Ox, \\ \mathfrak{D} Q_1 \left(e^{-i\alpha} \frac{d}{dz} \right) \left(e^{-i\alpha} \frac{d}{dz} \right) f(z) &= 0 \quad \text{sur} \quad Ot, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_1(\zeta) &\equiv c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_s \zeta^s, \\ Q_1(\zeta) &\equiv c'_0 + c'_1 \zeta + c'_2 \zeta^2 + \dots + c'_r \zeta^r, \end{aligned}$$

polynômes à *coefficients réels*.

Nous cherchons ensuite à déterminer ces polynômes par la condition :

$$P_1(\zeta) \cdot (\zeta + i) \equiv Q_1(\zeta e^{-i\alpha}) \cdot \zeta e^{-i\alpha}.$$

Le calcul d'identification donne les résultats suivants :

- 1° $r = s$, les deux polynômes sont de même degré;
- 2° il faut nécessairement $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, avec p admissible;
- 3° les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_{q-1}; c'_0, c'_1, \dots, c'_{q-2}$ sont nuls;
- 4° ensuite, $c_{q+h} = b_h; c'_{q+h-1} = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{b_{h-1}}{\sin h\alpha} (h = 1, 2, \dots, q-1)$.

On prendra donc pour $\mathfrak{T}_1$ l'opérateur :

$$\mathfrak{T}_1 \equiv \frac{d^q}{dz^q} \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \varrho_j \right),$$

tel que $E_1(z) = \mathfrak{T}_1 f(z)$ soit une fonction analytique de z dans l'angle (Ox, Ot) , sans autre singularité à distance finie que l'origine (hypothèse du § 2,21), prenant sur Ox, Ot des valeurs réelles.

En raisonnant comme au § 2,14, on définirait, pour le cas 3 DR, l'opérateur :

$$T_1 \equiv \frac{\partial^q}{\partial x^q} \cdot P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right),$$

tel que $\chi_1(x, y) = T_1 \varphi(x, y)$ soit, dans l'angle (Ox, Ot) , une solution de l'équation $\Delta \chi_1 - k^2 \chi_1 = 0$, sans autre singularité à distance finie que l'origine (cf. § 2,22), nulle sur Ox et Ot .

Expressions de $\mathfrak{T}_1 f(z)$ et de $T_1 \varphi(x, y)$.

En modifiant légèrement l'analyse des §§ 2,21, 2,22, on trouve :

$$E_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{B_n}{z^{\frac{2n+q}{p}}}, \quad \chi_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n I_{2n\frac{q}{p}}(kr) + \beta_n K_{2n\frac{q}{p}}(kr) \right] \sin 2n\frac{q}{p}\theta.$$

Comparaison avec les résultats précédents.

Indiquons comment, dans le cas 2 D, on peut revenir de $E_1(z)$ et $E(z)$ défini par (2/12), le passage inverse étant plus facile.

En comparant $\mathfrak{E}_1$ avec $\mathfrak{E}$, on voit que nous avons obtenu :

$$\frac{d^q}{dz^q} E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{\frac{(2n+1)q}{p}}}.$$

La série du second membre étant absolument et uniformément convergente, on trouve que q intégrations successives donnent la série (2/12) [car $2n\frac{q}{p} - q = (2n' + 1)\frac{q}{p}$, avec $n' = n - \frac{1}{2}(p-1) - 1$], à laquelle s'ajoute un polynôme en z arbitraire de degré $q-1$. *Ce polynôme peut être supprimé*; en effet, son introduction revient à ajouter à $f(z)$ un polynôme analogue de degré $q-1$; un calcul facile montre alors que ce dernier polynôme ne peut vérifier les conditions (1/25), (1/26) que s'il se réduit à une constante imaginaire pure, donc négligeable.

On peut faire un raisonnement analogue dans le cas 3 DR, mais les calculs sont plus compliqués.

On conclut de là que le prolongement préalable de $f(z)$ ou de $\varphi(x, y)$ dans le domaine $\mathcal{O}'$ est un élément important de *simplification des calculs*, et qu'il doit être préféré à une méthode directe.

2,3

FORME FINALE DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Le problème étudié étant linéaire, nous prendrons séparément les divers termes des séries (2/12) et (2/13). La solution la plus générale du problème sera obtenue ensuite par des combinaisons linéaires finies ou infinies, à coefficients réels, des solutions partielles ainsi obtenues (« principe de superposition »); nous nous limiterons d'ailleurs, dans toute la suite de notre étude, au cas des *combinaisons linéaires d'un nombre fini de solutions*.

Les énoncés transformés du problème sont les suivants :

Mouvements 2 D : potentiel complexe $f(z)$:

« Déterminer une fonction $f(z)$ analytique dans $\mathcal{O}$, sans autre singularité à distance finie que l'origine, telle que :

$$(2/11) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \varphi_j \right) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{\frac{(2n+1)q}{p}}} \quad (n \text{ entier } \geq 0 \text{ ou } n=0);$$

$$(2/15) \quad \Re [f'(z) + i f(z)] = 0 \quad \text{pour } z \text{ réel} \quad (\text{sur } \mathcal{O}x);$$

$$(2/16) \quad \Re \left[e^{-ip\frac{\bar{z}}{2q}} \frac{df}{dz} \right] = 0 \quad \text{pour } z = re^{-ip\frac{\bar{z}}{2q}}, \quad r \text{ réel} \quad (\text{sur } \mathcal{O}t). »$$

B_n est réel, mais arbitraire; la seule condition que les B_n doivent vérifier est que la série (2/12) soit absolument et uniformément convergente pour $z \neq 0$, condition qui n'aurait à intervenir que si l'on considérait des séries infinies de solutions $f(z)$.

Nous appellerons en abrégé (2/14) l'équation différentielle de LEWY. Les conditions (2/15), (2/16) devant avoir lieu tout au long de deux droites ne sont pas des conditions aux limites de type usuel pour une équation différentielle, mais, en fait, ici, cette équation et les deux conditions ne sont pas indépendantes.

Mouvements 3 DR : potentiel $e^{ikz} \cdot \varphi(x, y)$.

« Trouver une fonction $\varphi(x, y)$, régulière dans $\mathcal{O}$, sauf en 0, telle que :

$$(1/27) \quad \Delta \varphi - k^2 \varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - k^2 \varphi = 0;$$

$$(2/17) \quad \prod_{j=1}^{q-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \rho_j \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) \varphi(x, y) = \begin{cases} A_n I_{(2n+1)}^q(kr) \sin(2n+1) \frac{q}{p} 0; \\ B_n K_{(2n+1)}^q(kr) \sin(2n+1) \frac{q}{p} 0; \end{cases}$$

$$(2/18) \quad \varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad y = 0;$$

$$(2/19) \quad \frac{d\varphi}{dn} \equiv \sin \alpha \cdot \varphi_x + \cos \alpha \cdot \varphi_y = 0 \quad \text{sur} \quad x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. »$$

Dans toute la suite de notre étude, sauf indication explicite, nous nous limiterons à l'étude des mouvements bidimensionnels.

2,4 ÉTUDE DES QUANTITÉS ρ_j

Nous allons étudier plus en détail les quantités ρ_j introduites au § 2,13 comme racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle de LEWY.

Par définition :

$$(2/20) \quad \rho_j = ie^{ijp\frac{\pi}{q}} \quad (j = 1, 2, \dots, q)$$

et, en particulier, $\rho_q = -i$.

2,41 Relations entre les ρ_j .

A partir de la définition précédente, on vérifie immédiatement les relations suivantes :

$$(2/21) \quad \rho_{q-j} = \rho_j \quad (j = 1, 2, \dots, q-1);$$

$$(2/22) \quad \rho_{j+1} = e^{ip\frac{\pi}{q}} \cdot \rho_j \quad (j = 1, 2, \dots, q-1).$$

2,42 Images des ρ_j dans le plan complexe.

La disposition des images des ρ_j dans le plan complexe est *fondamentale* pour l'étude à l'infini dans $\mathcal{O}$ des exponentielles $\exp(\rho_j z)$ (cf. chap. IV, V) :

Premier cas : $p = 1$.

Un argument de ρ_j est $\frac{\pi}{2} + j\frac{\pi}{q}$, et, pour $j = 1, 2, \dots, q$, cet argument varie entre :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{q} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + \pi \quad (\text{pour } j = q).$$

Puisque, en outre, $|\rho_j| = 1$, on en déduit que les images des ρ_j appartiennent toutes au cercle-unité, à *gauche* de l'axe imaginaire, sauf $\rho_q = -i$ situé sur cet axe.

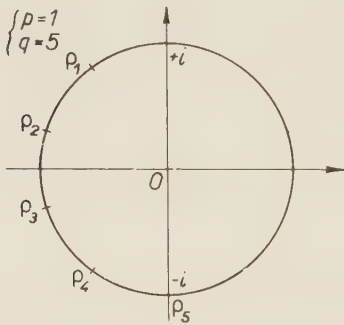


Fig. 4

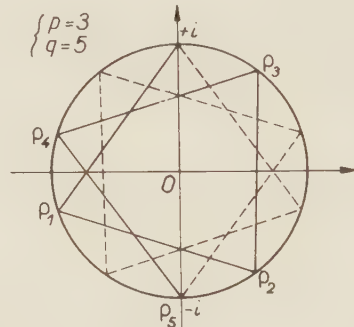


Fig. 5

De plus, d'après (2/21), les points ρ_j et ρ_{q-j} , pour $j = 1, 2, \dots, q-1$, sont symétriques par rapport à l'axe réel.

La *figure 4* est tracée pour $q = 5$.

Deuxième cas : $p > 1$ ($p = 3, 5, 7 \dots$).

La disposition des points ρ_j sur le cercle-unité est alors complètement différente.

Interprétons géométriquement. Divisons la circonférence unité en $2q$ parties égales à partir du point $+i$, et joignons les points de division ainsi obtenus de p en p à partir de $+i$. Nous formons ainsi un polygone régulier de $2q$ côtés, convexe pour $p = 1$, étoilé pour $p > 1$. Les images de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ sont les sommets de ce polygone qui suivent le point $+i$, dans l'ordre de succession des côtés. Comme on s'arrête à ρ_q , on n'épuise pas tous les sommets du polygone; on voit aisément que les autres sommets correspondent au changement de p en $2q - p$, q étant inchangé, c'est-à-dire de α en $\pi - \alpha$, le sommet $+i$ restant inutilisé (il correspondrait à $j = 0$), le sommet $-i$ étant image commune de ρ_q .

La *figure 5* est tracée pour $p = 3, q = 5$.

On voit ainsi géométriquement le résultat suivant : alors que pour $p = 1$ (polygone convexe) les sommets utiles se placent, sauf ρ_q , à gauche de l'axe imaginaire,

pour $p > 1$ (polygone étoilé), les sommets utiles, ρ_q mis à part, se situent aussi bien à droite qu'à gauche de l'axe imaginaire. De façon précise, nous avons le :

Théorème.

Pour $p > 1$, la suite $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{q-1}$ renferme *au moins un* terme ayant une partie réelle *strictement positive*.

Toutefois, en raison de l'importance de ce résultat pour la suite (cf. chap. V), on ne peut se contenter de l'évidence géométrique; on trouvera une démonstration arithmétique dans le mémoire de LEWY ([5], § 7).

Remarque.

Il est facile de montrer que le seul point ρ_j ($j = 1, 2, \dots, q$) situé sur l'axe imaginaire est le point ρ_q .

2,5 ÉTUDE DES QUANTITÉS a_j

L'étude du problème homogène défini au § 2,3 (cf. §§ 4,1 et 5,1), ainsi que l'application de la méthode de variation des constantes à l'équation différentielle de LEWY non homogène, conduit à définir des quantités a_j , que nous étudierons dès maintenant, pour ne pas interrompre les exposés ultérieurs.

2,50 Définition.

Nous posons, par définition :

$$(2/23) \quad a_j = \frac{\rho_j^{j-1}}{\sigma_j},$$

où :

$$\sigma_j = (\rho_j - \rho_1)(\rho_j - \rho_2) \dots (\rho_j - \rho_{j-1})(\rho_j - \rho_{j+1}) \dots (\rho_j - \rho_q);$$

autrement dit, avec, comme plus haut, $R(\zeta) = \prod_{j=1}^q (\zeta - \rho_j)$:

$$(2/24) \quad a_j = \text{Résidu de } \frac{\zeta^{q-1}}{\zeta - \rho_j} R(\zeta).$$

Ces définitions entraînent immédiatement les relations de décomposition :

$$(2/25) \quad \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{\zeta - \rho_j} = \frac{\zeta^{q-1}}{R(\zeta)};$$

$$(2/26) \quad \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j(\zeta - \rho_j)} = \frac{1}{R(\zeta)}.$$

2,51 **Relations fondamentales.**

Les a_j vérifient deux groupes de relations, fondamentales pour la suite, qui les caractérisent à un facteur réel multiplicatif près,

Premier groupe de relations.

Changeons j en $q - j$ ($j = 1, 2, \dots, q - 1$). On vérifie, d'après (2/21), que :

$$(\rho_j + i) \sigma_{q-j} = (\rho_j - i) \sigma_j,$$

d'où l'on déduit :

$$(2/27) \quad (\rho_j - i) a_{q-j} = (\rho_j + i) a_j \quad (j = 1, 2, \dots, q - 1).$$

Second groupe de relations.

Changeons j en $q - j + 1$ ($j = 1, 2, \dots, q$). On vérifie, d'après (2/22), que :

$$\sigma_{q-j+1} = e^{i\pi \frac{j}{q}(q-1)} \cdot \sigma_j,$$

d'où résulte :

$$(2/28) \quad a_{q-j+1} = a_j \quad (j = 1, 2, \dots, q);$$

autrement dit, dans la suite $a_1, a_2, \dots, a_q$, les termes extrêmes et équidistants des extrêmes sont conjugués.

Théorème fondamental.

« Les deux groupes de relations (2/27) et (2/28) caractérisent les a_j à un facteur réel multiplicatif près. »

Appelons en effet a'_j des quantités vérifiant les deux groupes de relations :

$$(2/29) \quad (\rho_j - i) a'_{q-j} = (\rho_j + i) a'_j \quad (j = 1, 2, \dots, q - 1);$$

$$(2/30) \quad a'_{q-j+1} = a'_j \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Si nous posons $a'_j = \delta_j \cdot a_j$, en divisant membre à membre les relations correspondantes des groupes (2/27), (2/29) et (2/28), (2/30) respectivement, nous obtenons :

$$\delta_{q-j} = \delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, q - 1),$$

$$\delta_{q-j+1} = \delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

et par suite :

$$\delta_{j+1} = \delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, q - 1),$$

ce qui montre que δ_j est une constante δ , indépendante de j , telle que $\delta = \bar{\delta}$; autrement dit, δ est une constante réelle.

Nous utiliserons ce théorème aux §§ 4,1 et 5,1, puis 4,2 et 5,2. STOKER [12] et LEWY [5] l'ont implicitement utilisé, mais sans avoir la définition (2/23) des a_j , ce qui les obligeait à chercher la solution des relations (2/27), (2/28) sous la forme explicite que nous donnons ci-dessous.

2,52 Expression explicite des a_j .

Dans toute la suite, nous utiliserons surtout la définition (2/23) des a_j . Dans un cas numérique, on pourrait calculer facilement les a_j à l'aide de la relation de décomposition (2/25). Nous nous bornerons à résumer les calculs qui permettent d'explicitier les a_j , calculs qui ne présentent que des différences de détail avec ceux de STOKER et LEWY.

Relation de récurrence.

Si l'on élimine $\bar{a}_{q-j+1}$ entre la relation (2/27) écrite pour $j-1$ et la relation (2/28) écrite pour j , on trouve, après des réductions faciles :

$$a_j = -ia_{j-1} \cdot \cotg(j-1) \frac{p\pi}{2q},$$

d'où l'on déduit, par comparaison avec la relation de récurrence (2/5) qui lie les b_j , la relation :

$$(2,31) \quad a_j = (-i)^{j-1} \cdot a_1 \cdot b_{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots, q),$$

ce qui nous ramène au calcul de a_1 .

Calcul de a_1 .

La définition (2/23) donne :

$$\frac{1}{a_1} = \left(1 - e^{ip\frac{\pi}{q}}\right) \left(1 - e^{2ip\frac{\pi}{q}}\right) \dots \left(1 - e^{(q-1)ip\frac{\pi}{q}}\right),$$

et l'on évalue séparément le module et l'argument des deux membres.

Pour le *module*, la formule précédente donne :

$$\frac{1}{|a_1|^2} = \frac{1}{a_1 \bar{a}_1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^{2q} - 1}{u^2 - 1} = q \quad \text{d'où} \quad |a_1| = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Pour l'*argument*, la même formule, écrite différemment, donne :

$$\frac{1}{a_1} = e^{i(p-2)(q-1)\frac{\pi}{4}} \cdot \left[2^{q-1} \sin \frac{p\pi}{2q} \cdot \sin \frac{2p\pi}{2q} \dots \sin (q-1) \frac{p\pi}{2q} \right].$$

Comme le crochet au second membre est réel et comme $|a_1| = \frac{1}{\sqrt{q}}$, on en déduit la relation incidente :

$$\sin \frac{p\pi}{2q} \sin \frac{2p\pi}{2q} \dots \sin (q-1) \frac{p\pi}{2q} = (-1)^{N'(p,q)} \cdot \frac{\sqrt{q}}{2^{q-1}},$$

où $N'(p, q)$ est une fonction arithmétique de p et q , non explicitable dans le cas général, qui représente le nombre de sinus négatifs du premier membre pour $p = 1$, on a $N'(p, q) = 0$.

Finalement, nous trouvons :

$$(2/32) \quad a_1 = e^{-i(p-2)(q-1)\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{(-1)^{N'(p,q)}}{\sqrt{q}}.$$

Conclusion.

Rapprochant (2/31) et (2/32), on trouve :

$$(2/33) \quad a_j = \frac{(-1)^{N'(p,q)}}{\sqrt{q}} \cdot e^{-i[(p-2)(q-1)+2(j-1)]\frac{\pi}{4}} \cdot b_{j-1}$$

et, en particulier, pour $p = 1$:

$$(2/34) \quad a_j = \frac{1}{\sqrt{q}} e^{i(q-2j+1)\frac{\pi}{4}} \cdot b_{j-1};$$

plus particulièrement :

$$(2/35) \quad a_q = \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-i(q-1)\frac{\pi}{4}} \quad \text{pour} \quad p = 1.$$

Remarques.

La fonction arithmétique $N'(p, q)$ que nous introduisons étant différente de la fonction $N(p, q)$ dont se sert LEWY, nos formules diffèrent de celles de LEWY par un facteur multiplicatif réel, positif ou négatif, ce qui est évidemment sans influence sur la recherche des fonctions $f(z)$.

LEWY donne en outre, pour $p > 1$, de nombreuses relations entre les a_j qui imposent des distinctions sur les valeurs de p, q . Notre définition (2/23) permet, dans l'étude théorique du problème, de n'avoir à faire aucune distinction de parité sur p et q .

2,6

ÉTUDE DES SOMMES S_h

Nous aurons besoin, principalement au § 4,61, de la valeur de certaines sommes dont l'expression renferme à la fois les a_j et les ρ_j . Comme pour les a_j , nous préférons les étudier à part.

2,60 Définition.

Nous poserons, par définition :

$$(2/36) \quad S_h = \sum_{j=1}^q \frac{\rho_j^h}{\sigma_j} = \sum_{j=1}^q a_j \cdot \rho_j^{h-q+1},$$

h étant un entier positif, négatif ou nul.

Nous nous proposons de calculer les valeurs de S_h selon les valeurs de h , dans les cas qui nous seront utiles par la suite.

2,61 **Propriété de périodicité.**

« La suite des S_h est périodique en h . »

Cela tient à la définition (2/20) des ρ_j , d'après laquelle :

$$\rho_j'^q = 1 \quad \text{et} \quad \rho_j''^q = (-1)^q,$$

d'où :

$$(2/37) \quad \begin{cases} S_{4q+h} = S_h, \\ S_{2q+h} = (-1)^q S_h. \end{cases}$$

La période de la suite par rapport à h est donc $4q$ en général, $2q$ seulement si q est pair.

De toutes manières, le calcul des valeurs de S_h se ramène au calcul de ces sommes pour $0 \leq h \leq 2q - 1$.

Le résultat est très différent selon que :

$$0 \leq h \leq q - 1 \quad \text{ou} \quad q \leq h \leq 2q - 1.$$

2,62 **Calcul de S_h pour $0 \leq h \leq q - 1$ (p quelconque).**

Si nous utilisons la relation suivante, analogue à (2/25) :

$$(2/38) \quad \frac{\zeta^h}{R(\zeta)} = \sum_{j=1}^q \frac{\rho_j^h}{\sigma_j} \cdot \frac{1}{\zeta - \rho_j},$$

quand on réduit le second membre au dénominateur $R(\zeta)$, le coefficient de ζ^{q-1} au numérateur est S_h ; par comparaison avec le numérateur ζ^h du premier membre, on en déduit :

$$(2/39) \quad \begin{cases} S_h = 0 & (h = 0, 1, 2, \dots, q-2), \\ S_h = 1 & (h = q-1), \end{cases}$$

ou, sous une autre forme :

$$(2/40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{\rho_j} = \sum \frac{a_j}{\rho_j^2} = \dots = \sum \frac{a_j}{\rho_j^{q-1}} = 0, \\ \sum a_j = 1. \end{array} \right.$$

On trouve ainsi :

$$S_q = -(i + b_1)$$

d'où, en reportant dans la seconde relation :

$$S_{q+1} = (i + b_1)^2 - (ib_1 + b_2) = ib_1 + b_2,$$

d'après :

$$b_1 = \cotg \alpha, \quad b_2 = \cotg \alpha \cdot \cotg 2\alpha \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{2q} \right).$$

Par suite :

$$S_{q+2} = -(ib_2 + b_3).$$

Nous continuerons par récurrence, en admettant que :

$$(2/42) \quad S_{q+l} = (-1)^{l+1} (ib_l + b_{l+1}) \quad \text{pour} \quad 1 \leq l \leq 2k-1 < q-1,$$

mais le raisonnement est différent selon qu'il s'agit de démontrer cette relation pour $l = 2k$ ou pour $l = 2k + 1$:

Premier cas : $l = 2k$.

On a immédiatement le résultat d'après la $(2k+1)^e$ relation (2/41), car les termes équidistants des extrêmes disparaissent quand on remplace S_{q+l} ($1 \leq l \leq 2k-1$) par leurs valeurs.

Deuxième cas : $l = 2k + 1$.

Le résultat n'est plus ici immédiat, car si nous remplaçons les S_{q+l} ($1 \leq l \leq 2k$) par leurs valeurs et S_{q+2k+1} par sa valeur supposée, nous avons à démontrer la relation :

$$(ib_{2k+1} + b_{2k+2}) - (i + b_1)(ib_{2k} + b_{2k+1}) + \dots + \frac{1}{2}(-1)^{k+1}(ib_k + b_{k+1})^2 = 0$$

ou encore, puisque $ib_{h-1} + b_h = \frac{b_{h-1} \cdot e^{ih\alpha}}{\sin h\alpha}$:

$$\frac{b_{2k+1}}{\sin(2k+2)\alpha} - \frac{b_{2k}}{\sin\alpha \sin(2k+1)\alpha} + \frac{b_1 b_{2k-1}}{\sin 2\alpha \cdot \sin 2k\alpha} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{b_k^2}{2 \sin^2(k+1)\alpha} = 0.$$

Compte tenu de la relation de récurrence qui lie les b_n , soit :

$$b_h = b_{h-1} \cdot \cotg h\alpha \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{2q} \right),$$

la somme des deux premiers termes de la relation à démontrer s'écrit :

$$-\frac{b_1 b_{2k}}{\sin(2k+2)\alpha}.$$

Ajoutant au résultat le troisième terme, on trouve :

$$\frac{b_2 b_{2k-1}}{\sin(2k+2)\alpha}$$

et l'on montrera sans peine par récurrence que la somme des $k' + 1$ premiers termes de cette relation, a pour valeur :

$$(-1)^{k'} \frac{b_{k'} b_{2k-k'+1}}{\sin(2k+2)\alpha}.$$

Il suffit alors de prendre la somme des $k + 1$ premiers termes et d'ajouter le dernier, pour obtenir la relation demandée.

Ceci nous démontre donc que la formule (2/42) est générale. Appliquée à la dernière relation (2/41) elle fournit :

$$S_{2q-1} = (-1)^q \cdot i b_{q-1}.$$

En résumé, les valeurs de S_h pour $q \leq h \leq 2q - 1$, sont les suivantes :

$$(2/43) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_q = -(i + b_1), \\ S_{q+1} = i b_1 + b_2, \\ \dots\dots\dots, \\ S_{q+l} = (-1)^{l+1} (i b_l + b_{l+1}), \\ \dots\dots\dots, \\ S_{2q-1} = (-1)^q \cdot i b_{q-1}. \end{array} \right.$$

On peut remarquer que les seconds membres ne sont autres que les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... des nombres $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{q-1}, \rho_q$. Toutefois, ce résultat *remarquablement simple* n'a été obtenu que grâce à l'expression particulière des ρ_j .

REPRÉSENTATION DE CERTAINES INTÉGRALES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ⁽¹⁾

3,0

GÉNÉRALITÉS

Nous considérons dans ce chapitre une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène, que nous écrirons :

$$(3/1) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = E(z),$$

les ρ_j étant ici des constantes quelconques, la définition (2/20), relative à l'équation différentielle de LEWY, étant laissée de côté dans ce chapitre. La variable z est complexe et $E(z)$ est une fonction donnée.

Nous nous proposons d'étudier et de comparer plusieurs représentations d'une intégrale particulière de (3/1).

La représentation usuelle est celle qui est fournie par la méthode de LAGRANGE, ou « *méthode de variation des constantes* »; elle offre l'inconvénient, d'une part, de nécessiter des calculs différents selon que les ρ_j sont distincts ou non, d'autre part, de présenter $h(z)$ sous forme d'une somme de q intégrales prises dans le plan complexe; en revanche, elle offre l'avantage de s'appliquer quel que soit le second membre $E(z)$.

La deuxième représentation que nous allons dégager dans le cas où $E(z) = \frac{1}{z^\lambda}$, offre l'avantage de fournir $h(z)$ sous forme d'une seule intégrale prise dans le plan complexe, et en outre, le résultat est valable, que les ρ_j soient ou non distincts. Nous l'appellerons « *méthode de LAPLACE* », car elle rentre dans le cadre des méthodes ayant pour objet la représentation des solutions d'équations différentielles par des intégrales, le noyau étant ici celui de LAPLACE; elle se rapproche aussi de la méthode d'intégration par le calcul symbolique (transformée de LAPLACE au sens restreint). Cette méthode offre, par contre, l'inconvénient sérieux, lorsqu'on cherche à l'appliquer à un second membre $E(z)$ quelconque, de supposer trouvée pour $E(z)$ une représentation intégrale avec noyau de LAPLACE (cf. § 3,3).

Les calculs sont différents selon que, dans $E(z)$, l'exposant λ est ou non égal à un entier positif.

(1) Cf. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, tome 240, 1955, pp. 2113-2115.

$$3,1 \quad \text{CAS OU } E(z) = \frac{1}{z^n} \quad (n \text{ ENTIER POSITIF})$$

L'équation (3/1) s'écrit alors :

$$(3/2) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = \frac{1}{z^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Nous allons exposer successivement les deux méthodes, puis étudier dans quel cas les intégrales de (3/2) qu'elles représentent sont identiques.

3,11 Méthode de la variation des constantes.

Comme les résultats de ce chapitre ne seront appliqués dans les chapitres ultérieurs qu'à l'équation différentielle de LEWY, nous supposerons, pour faire les calculs dans le cas de la méthode de la variation des constantes, que les ρ_j sont *distincts*.

Les calculs sont classiques. L'intégrale générale de l'équation (3/2) homogène étant :

$$(3/3) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q c_j e^{\rho_j z},$$

où les c_j sont des constantes, nous regardons les c_j comme des fonctions de z qui devront, d'après cette méthode, satisfaire aux relations :

$$(3/4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^q c'_j e^{\rho_j z} = 0, \\ \sum_{j=1}^q c'_j \rho_j e^{\rho_j z} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^q c'_j \rho_j^{q-2} e^{\rho_j z} = 0, \\ \sum_{j=1}^q c'_j \rho_j^{q-1} e^{\rho_j z} = \frac{1}{z^n}. \end{array} \right.$$

Les ρ_j étant distincts, ce système admet une solution unique qui s'écrit immédiatement, par comparaison avec les relations (2/39) :

$$c'_j e^{\rho_j z} = \frac{1}{\sigma_j z^n},$$

σ_j ayant la signification donnée au § 2,50; on en déduit :

$$(3/5) \quad c_j = \gamma_j + \frac{1}{\sigma_j} \int_{\infty}^z \frac{e^{-\rho_j u}}{u^n} du,$$

les γ_j étant des constantes arbitraires. Nous simplifierons ce résultat en posant $\rho_j u = -t$, le chemin d'intégration dans le plan t , soit C_j , étant une courbe continue (fig. 6) qui :

- part de $-\infty$ sur l'axe réel ;
- aboutit au point $-\rho_j z$;
- ne passe pas par l'origine.

(3/5) se transforme ainsi en :

$$(3/6) \quad c_j = \gamma_j + \frac{(-\rho_j)^{n-1}}{\sigma_j} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^n} dt.$$

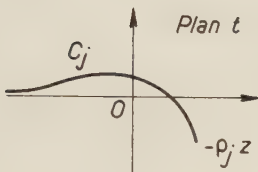


Fig. 6

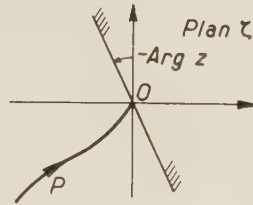


Fig. 7

Une déformation de C_j ayant pour effet de lui faire traverser l'origine du plan t modifiant en général la valeur de γ_j , nous supposons les C_j fixés, sans que leur disposition par rapport à l'origine soit nécessairement la même quel que soit j .

Si l'on remplace c_j par (3/6) dans (3/3), nous trouvons l'expression :

$$(3/7) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q \frac{(-\rho_j)^{n-1}}{\sigma_j} e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^n} dt,$$

qui représente une intégrale particulière de l'équation (3/2) non homogène.

Remarque.

Le point de départ de C_j dans le plan t peut être un point à l'infini quelconque dans le demi-plan $\Re t \leq 0$, sans que cela modifie la fonction (3/7); il est en effet classique que l'intégrale de $\frac{e^t}{t^n}$ le long d'un arc de cercle centré à l'origine et situé dans le demi-plan $\Re t \leq 0$ tend vers zéro quand le rayon de ce cercle tend vers l'infini.

Notre raisonnement vaut pour des chemins C_j tournant autour de l'origine un certain nombre de fois avant de parvenir au point $-\rho_j z$, mais nous n'aurons en fait besoin, dans la suite, que de chemins assez particuliers.

3,12 Méthode de LAPLACE.

Avec $R(\zeta) = \prod_{j=1}^q (\zeta - \rho_j)$, posons :

$$(3/8) \quad h(z) = A \int_P e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{n-1}}{R(\zeta)} \cdot d\zeta,$$

A étant une constante à déterminer, et P un chemin du plan ζ (*fig. 7*) qui :

- part de l'infini dans le demi-plan $\Re(z\zeta) < 0$ (strictement négatif);
- aboutit à l'origine;
- ne passe par aucun des points ρ_j .

La branche infinie de P appartenant au demi-plan $\Re(z\zeta) < 0$, l'intégrale (3/8) est une fonction holomorphe de z (supposé non nul) dont les dérivées en z s'obtiennent par dérivation sous le signe somme.

Un calcul simple donne alors :

$$\prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = A \int_P e^{z\zeta} \cdot \zeta^{n-1} \cdot d\zeta.$$

On calcule l'intégrale du second membre en posant $z\zeta = \tau$, et en remarquant que le chemin correspondant à P dans le plan τ peut être ramené sur le demi-axe réel négatif, d'où :

$$A \int_P e^{z\zeta} \cdot \zeta^{n-1} d\zeta = \frac{A}{z^n} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} \cdot \tau^{n-1} d\tau = \frac{A}{z^n} (-1)^{n-1} \cdot \Gamma(n),$$

ce qui nous montre qu'en adoptant $A = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$, (3/8) sera une intégrale particulière de (3/2), soit :

$$(3/9) \quad h(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_P e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{n-1}}{R(\zeta)} d\zeta.$$

Remarques.

1° Comme les ρ_j n'interviennent que par le polynôme caractéristique $R(\zeta)$ de (3/2), le résultat (3/9) vaut que les ρ_j soient ou non distincts;

2° pourvu que P vérifie les conditions imposées, (3/9) représente toujours une intégrale de (3/2); toutefois, selon la position précise de P, on n'obtient pas nécessairement la même intégrale. On peut montrer facilement, d'autre part, qu'il n'est pas possible de représenter à l'aide de (3/9), en choisissant convenablement P, une intégrale arbitraire de (3/2).

3,13 Comparaison des résultats.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

« Les formules (3/7) et (3/9) représentent la même fonction, si le chemin P se comporte autour de chaque ρ_j de la même manière que le chemin C_j correspondant se comporte autour de l'origine. »

Pour démontrer ce résultat, nous supposerons que les ρ_j sont *distincts*.

On peut écrire (3/7) sous la forme :

$$(3/10) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} H_j^1 \quad \text{avec} \quad H_j^1 = (-\rho_j)^{n-1} e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^n} dt,$$

et de même pour (3/9), compte tenu de (2/26) :

$$(3/11) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} H_j^2 \quad \text{avec} \quad H_j^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_P e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{n-1}}{\zeta - \rho_j} d\zeta.$$

On en conclut que, si H_j^1 et H_j^2 sont égales pour des chemins C_j et P convenablement associés, il en sera de même des fonctions (3/7) et (3/9), *si la correspondance établie entre C_j et P vaut pour tout j .*

Dans la démonstration qui suit de l'égalité de H_j^1 et H_j^2 , nous supprimons l'indice j des formules (3/10), (3/11), puisqu'il n'en intervient qu'un seul.

Transformation préalable de H^1 et H^2 .

Si, dans (3/10), nous posons $t + \rho z = \tau$, nous trouvons :

$$(3/12) \quad H^1 = (-\rho)^{n-1} \int_{C'} \frac{e^\tau}{(\tau - \rho z)^n} d\tau,$$

C' étant le chemin du plan τ associé à C dans le changement de variable; mais le résultat obtenu montre que la branche infinie de C' peut être quelconque dans le demi-plan $\Re \tau \leq 0$, en sorte que C' est un chemin qui :

- part de l'infini dans le demi-plan $\Re \tau \leq 0$;
- aboutit à l'origine;
- ne passe pas par le point ρz , et se comporte autour de ce point comme C autour de O dans le plan t .

Si, dans (3/11), nous posons $z\zeta = \tau$, nous trouvons :

$$(3/13) \quad H^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! z^{n-1}} \int_{P'} e^\tau \cdot \frac{\tau^{n-1}}{\tau - \rho z} d\tau.$$

P' étant associé à P dans le changement de variable; P' est donc un chemin qui :

- part de l'infini dans le demi-plan $\Re \tau < 0$ (strictement négatif);
- aboutit à l'origine;
- ne passe pas par le point ρz , et se comporte autour de ce point comme P autour de ρ .

Théorème.

« Les fonctions H^1 et H^2 sont identiques, si les chemins P' et C' sont, dans le plan τ , réductibles l'un à l'autre sans traverser le point ρz . »

Si $n = 1$, le théorème est évident. Nous donnerons de ce théorème deux démonstrations, l'une directe, l'autre indirecte.

Démonstration « directe ».

Cette démonstration permet de passer, par le calcul, de H^1 à H^2 .

Partons de l'identité suivante, où a est une constante quelconque :

$$\frac{1}{\tau - a} = -\frac{1}{a} - \frac{\tau}{a^2} - \dots - \frac{\tau^{n-2}}{a^{n-1}} + \frac{\left(\frac{\tau}{a}\right)^{n-1}}{\tau - a};$$

en prenant les dérivées $(n - 1)^e$ des deux membres, on trouve :

$$(3/14) \quad \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\tau - a)^n} = \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \left[\frac{\left(\frac{\tau}{a}\right)^{n-1}}{\tau - a} \right].$$

Si l'on remplace dans cette relation a par ρz , si l'on multiplie les deux membres par e^τ et si l'on intègre le long de C' , il vient :

$$H^1 = \frac{1}{(n-1)! z^{n-1}} \int_{C'} e^\tau \cdot \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \left(\frac{\tau^{n-1}}{\tau - \rho z} \right) d\tau.$$

En limitant la branche infinie de C' au demi-plan $\mathcal{R} \tau$ strictement négatif, on peut transformer H^1 par des intégrations par parties; la partie tout intégrée disparaît, du fait des hypothèses faites sur C' , et en répétant le procédé, on trouve sans peine :

$$H^1 = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! z^{n-1}} \int_{C'} e^\tau \cdot \frac{\tau^{n-1}}{\tau - \rho z} d\tau,$$

ce qui démontre bien le théorème.

Démonstration « indirecte ».

En partant des expressions (3/10) et (3/11), on démontre aisément, grâce aux calculs déjà faits aux §§ 3,11 et 3,12, que H^1 et H^2 sont deux intégrales de la même équation différentielle :

$$(3/15) \quad \frac{dH}{dz} - \rho H = \frac{1}{z^n},$$

ce qui nous permet d'affirmer qu'entre H^1 et H^2 existe une relation de la forme :

$$H^2 = H^1 + A \cdot e^{\rho z}, \quad A \text{ étant une constante.}$$

Nous allons chercher à démontrer que $A = 0$ si P' et C' sont réductibles l'un à l'autre.

Supposons d'abord que P' et C' sont tous deux réductibles à une demi-droite Δ , appartenant au demi-plan $\mathcal{R} \tau < 0$, et ne passant, ni elle ni son support, par le point ρz .

Dans ces conditions, H^1 et H^2 tendent vers zéro, quand z tend vers l'infini avec un argument donné.

Ramenons en effet P' et C' sur Δ ; en appelant l la distance de ρz au support de Δ , et $\delta \left(0 \leq \delta < \frac{\pi}{2} \right)$ l'angle géométrique de Δ avec le demi-axe réel négatif du plan τ , nous aurons sur Δ (fig. 8) :

$$\tau - \rho z \geq l,$$

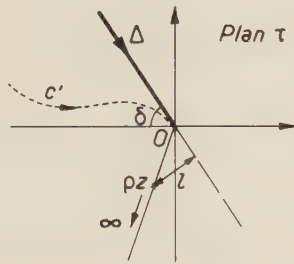


Fig. 8

d'où :

$$|H^1| \leq \frac{|\rho|^{n-1}}{l^n} \int_0^{+\infty} e^{-u \cos \delta} \cdot du = \frac{|\rho|^{n-1}}{l^n \cdot \cos \delta},$$

$$|H^2| \leq \frac{1}{(n-1)! |z|^{n-1} l} \int_0^{+\infty} e^{-u \cos \delta} \cdot u^{n-1} du = \frac{1}{l |z|^{n-1} \cdot \cos \delta},$$

d'où le résultat annoncé, puisque $l \rightarrow \infty$ quand $z \rightarrow \infty$ avec un argument donné.

Dès lors, si $\mathcal{R}(\rho z) > 0$ strictement, en faisant tendre z vers ∞ avec un argument donné, H^1 et H^2 tendent vers zéro, tandis que $\exp(\rho z)$ tend vers l'infini; il faut donc $A = 0$.

Si $\mathcal{R}(\rho z) \leq 0$, on ne peut raisonner pareillement, mais on remarque que, d'après une proposition classique, H^1 et H^2 sont des fonctions holomorphes de z , tant que ρz n'est pas sur Δ ; la différence $H^2 - H^1$ étant nulle pour $\mathcal{R}(\rho z) > 0$, restera donc nulle pour tout z tel que ρz ne soit pas sur Δ .

Pour étendre notre résultat à des chemins P' et C' plus généraux, il suffit de remarquer que, si P' et C' traverse ρz dans un sens déterminé, H^1 et H^2 varient de la même quantité :

$$\pm 2i\pi \frac{(-\rho)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\rho z},$$

ce qui nous démontre l'égalité de H^1 et H^2 sous la seule condition que P' et C' soient réductibles l'un à l'autre.

Conclusion.

Il suffit de rassembler les résultats partiels qui précèdent pour obtenir la démonstration du résultat énoncé au début de ce paragraphe.

Remarque.

Si nous remplaçons H^2 par son expression (3/13) dans $h(z)$, nous obtenons l'expression qui nous sera utile :

$$(3/16) \quad h(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! z^{n-1}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} \int_{\mathbf{r}} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^{n-1}}{\tau - \rho_j z} d\tau.$$

$$3,2 \quad \text{CAS OU } E(z) = \frac{1}{z^\lambda} \quad (\lambda \neq \text{ENTIER POSITIF})$$

L'équation (3/1) s'écrit ici :

$$(3/17) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = \frac{1}{z^\lambda} \quad (\lambda \neq 1, 2, 3, \dots).$$

L'exposé est ici analogue à celui du § 3,1; toutefois, il s'en écarte par endroits très notablement; en outre, l'intervention de fonctions multiformes complique un peu les raisonnements.

3,21 Méthode de la variation des constantes.

Comme au § 3,11, nous supposons que les ρ_j sont distincts.

Nous devons préciser en outre ici la signification attachée aux puissances non entières et, pour cela, nous ferons la *convention générale suivante* :

« On choisira pour z^λ la détermination qui est réelle pour z réel positif; autrement dit, on pose :

$$(3/18) \quad \text{Arg } z^\lambda = \lambda \cdot \text{Arg } z.$$

La même convention est faite pour toutes les puissances non entières qui interviendront dans ce qui suit. »

Nous supposons donc choisi un argument de z dans (3/17) et z^λ déterminé par la convention précédente.

Les calculs du § 3,11 nous fournissent une intégrale particulière de l'équation (3/17) non homogène sous la forme :

$$(3/19) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} e^{\rho_j z} \int_{\infty}^z \frac{e^{-\rho_j u}}{u^\lambda} du,$$

les bornes inférieures des intégrales étant choisies de manière à assurer leur convergence, et l'argument de u étant fixé tout au long des chemins d'intégration de telle sorte que pour $u = z$, on ait $\text{Arg } u = \text{Arg } z$ choisi plus haut.

Posons alors, comme au § 3,11, — $\rho_j u = t$ et appelons C_j le chemin d'intégration dans le plan t pour la $j^{\text{ème}}$ intégrale. La forme générale de C_j est fixée par le choix des arguments de t à ses extrémités quand on postule, comme nous le ferons, que l'argument de t varie continûment sur C_j (ce qui interdit, du fait même, à C_j de passer par l'origine du plan t) (*fig. 9*).

Pour cela, fixons-nous $\text{Arg } (-\rho_j)$ et admettons que :

$$\text{Arg } t = \text{Arg } (-\rho_j) + \text{Arg } u;$$

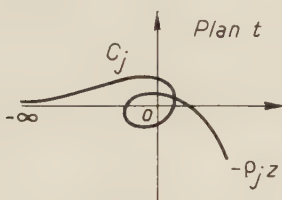


Fig. 9

cette relation entraîne, d'une part, d'après (3/18), que $t^\lambda = (-\rho_j)^\lambda \cdot u^\lambda$, d'autre part, qu'à l'extrémité finale de C_j , on ait :

$$(3/20) \quad \text{Arg } (-\rho_j z) = \text{Arg } (-\rho_j) + \text{Arg } z.$$

Faisant partir C_j du point $-\infty$ du plan t , l'argument de t étant quelconque en ce point, nous obtenons l'expression :

$$(3/21) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q \frac{(-\rho_j)^{\lambda-1}}{\sigma_j} e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^\lambda} dt,$$

le chemin C_j étant une courbe continue qui :

- part de $-\infty$ sur l'axe réel;
- aboutit au point $-\rho_j z$;
- est telle que l'argument de t varie sur elle d'une manière continue en vérifiant (3/20).

Remarques.

— Le point de départ de C_j dans le plan t peut être un point à l'infini quelconque dans le demi-plan $\Re t \leq 0$, sans que cela modifie la fonction (3/21); il importe toutefois de modifier convenablement l'argument de départ pour t .

— La correspondance établie entre t et u n'est qu'un intermédiaire de calcul; la relation fondamentale est (3/20), car elle entraîne :

$$(-\rho_j z)^\lambda = (-\rho_j)^\lambda \cdot z^\lambda,$$

d'où :

$$\frac{d}{dz} \left[(-\rho_j)^{\lambda-1} \int_{c_j} \frac{e^t}{t^\lambda} dt \right] = \frac{e^{-\rho_j z}}{z^\lambda},$$

relation qui permet à (3/21) d'être une intégrale particulière de (3/17) d'après les calculs du § 3,11.

3,22 Méthode de LAPLACE.

La méthode de LAPLACE peut être ici utilisée de deux manières, *l'une* valable pour $\lambda \geq 0$ ou $\lambda = 0$ mais différent d'un entier positif, *l'autre* valable seulement pour $\lambda > 0$, mais entier ou non.

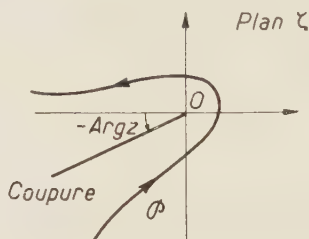


Fig. 10

3,221 FORMULE VALABLE POUR λ NON ENTIER POSITIF.

$\text{Arg } z$ étant choisi, entaillons le plan ζ suivant la demi-droite d'angle polaire $\pi - \text{Arg } z$, de telle sorte que la variation d' $\text{Arg } \zeta$ soit restreinte à l'intervalle $-\pi - \text{Arg } z, \pi - \text{Arg } z$; z^λ, ζ^λ sont toujours déterminés par la convention du § 3,21 (fig. 10).

Soit alors $\mathcal{C}$ un chemin qui :

- part de l'infini dans le demi-plan $\mathcal{R}(z\zeta) < 0$ et revient à l'infini dans ce même demi-plan, après avoir tourné autour de l'origine dans le sens direct;
- ne traverse pas la coupure;
- ne passe par aucun ρ_j .

Posons :

$$h(z) = A \int_{\mathcal{C}} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} d\zeta,$$

où A est une constante à déterminer. Le raisonnement du § 3,12 est applicable et donne :

$$\prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = A \int_{\mathcal{C}} e^{z\zeta} \cdot \zeta^{\lambda-1} d\zeta.$$

Nous calculons cette dernière intégrale en posant $\tau = z \zeta$, avec ici la précision supplémentaire $\text{Arg } \tau = \text{Arg } \zeta + \text{Arg } z$, de telle sorte que $\tau^\lambda = z^\lambda \cdot \zeta^\lambda$. Le chemin $\mathfrak{C}$ devient $\mathfrak{C}'$; le plan τ est entaillé suivant le demi-axe réel négatif, de telle sorte que l'argument de τ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$; les branches infinies du chemin $\mathfrak{C}'$ appartiennent au demi-plan $\Re \tau < 0$, et $\mathfrak{C}'$ tourne autour de O dans le sens direct. Comme la fonction intégrée n'admet plus les ρ_j comme singularités, $\mathfrak{C}'$ peut être ramené au contour classique de HANKEL, ce qui donne, d'après la formule de HANKEL :

$$A \int_{\mathfrak{C}} e^{z\zeta} \cdot \zeta^{\lambda-1} \cdot d\zeta = \frac{A}{z^\lambda} \int_{\mathfrak{C}'} e^\tau \cdot \tau^{\lambda-1} \cdot d\tau = \frac{A}{z^\lambda} \cdot \frac{2i\pi}{\Gamma(1-\lambda)}.$$

Par suite, en adoptant $A = \frac{1}{2i\pi} \Gamma(1-\lambda)$, nous obtiendrons une intégrale particulière de (3/17) sous la forme :

$$(3/22) \quad h(z) = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta.$$

Remarques.

1° Comme au § 3,12, le résultat est valable, que les ρ_j soient distincts ou non;

2° (3/22) ne représente pas toujours la même intégrale de l'équation, selon la position de $\mathfrak{C}$ dans le plan;

3° la formule (3/22) est inapplicable au cas λ entier positif, qui a fait l'objet du § 3,12; car, dans ce cas, la coupure peut être supprimée et l'on a évidemment :

$$\int_{\mathfrak{C}'} e^\tau \cdot \tau^{\lambda-1} d\tau = 0.$$

Application au cas $\lambda = -n$ (n entier positif ou nul).

L'équation différentielle est alors :

$$(3/23) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = z^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

et l'on sait qu'une telle équation admet une intégrale polynôme et une seule. Nous allons déduire de (3/22) une expression remarquable de ce polynôme.

Pour l'application de (3/22), il est ici inutile d'entailler le plan ζ , et par suite le chemin $\mathfrak{C}$ est réductible à un contour fermé entourant l'origine. Supposons, en outre, que $\mathfrak{C}$ n'entoure aucun des points ρ_j . Dès lors, (3/22) donne :

$$h(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} e^{z\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1} R(\zeta)} = n! \text{ Résidu}_{\zeta=0} \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1} \cdot R(\zeta)};$$

mais ce résidu est égal au coefficient de ζ^n dans la division de $1 + z\zeta + \frac{z^2\zeta^2}{2!} + \dots + \frac{z^n\zeta^n}{n!}$ par $R(\zeta)$ suivant les puissances croissantes de ζ , et par suite c'est un polynôme en z . D'où l'on conclut :

« L'intégrale particulière polynôme de (3/23) peut s'écrire :

$$(3/24) \quad h(z) = n! \operatorname{Résidu}_{\zeta=0} \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1} \cdot R(\zeta)} . »$$

3,222 FORMULE VALABLE POUR λ POSITIF.

Cette formule est la généralisation directe de (3/9) mais elle est un peu plus délicate à établir par suite de l'intervention des fonctions multiformes.

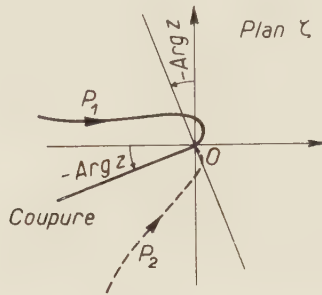


Fig. 11

Entaillons le plan ζ comme au § 3,221 et définissons z^λ , ζ^λ comme au § 3,21. Soit alors P_1 un chemin (fig. 11) qui :

- part de l'infini dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z\zeta) < 0$, de telle sorte qu'à l'infini sur P_1 l'argument de ζ soit compris entre $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg} z$ et $\pi - \operatorname{Arg} z$;
- aboutit à l'origine sans traverser la coupure;
- ne passe par aucun ρ_j .

Posons :

$$h(z) = A \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta,$$

A étant une constante à déterminer. Le raisonnement est celui du § 3,12, d'où :

$$\prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = A \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \zeta^{\lambda-1} d\zeta.$$

L'évaluation de cette dernière intégrale se fait comme au § 3,221, en posant :

$$\tau = z\zeta, \quad \operatorname{Arg} \tau = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \zeta,$$

de sorte que $\tau^\lambda = z^\lambda \zeta^\lambda$; P_1 devient P'_1 qu'on peut ramener sur le demi-axe réel négatif (coupure du plan τ) mais au-dessus, en sorte que sur P'_1 , on ait :

$$\tau = te^{i\pi} \quad (t \text{ positif variant de } 0 \text{ à } +\infty),$$

d'où :

$$\tau^\lambda = t^\lambda e^{i\pi\lambda}.$$

On en déduit :

$$A \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \zeta^{\lambda-1} \cdot d\zeta = \frac{A}{z^\lambda} \int_{P'_1} e^\tau \cdot \tau^{\lambda-1} d\tau = \frac{A}{z^\lambda} e^{i\pi(\lambda-1)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\lambda-1} dt = \frac{A}{z^\lambda} e^{i\pi(\lambda-1)} \cdot \Gamma(\lambda);$$

on adoptera donc :

$$A = \frac{e^{-i\pi(\lambda-1)}}{\Gamma(\lambda)},$$

ce qui nous donne une intégrale particulière de (3/17) sous la forme :

$$(3/25) \quad h(z) = \frac{e^{-i\pi(\lambda-1)}}{\Gamma(\lambda)} \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta.$$

Remarques.

1° La limitation $\lambda > 0$ est nécessaire pour que l'intégrale de (3/25) converge à l'origine;

2° si l'on remplaçait P_1 par un chemin P_2 analogue, mais tel qu'à l'infini sur P_2 l'argument de ζ soit compris entre $-\pi - \text{Arg } z$ et $-\frac{\pi}{2} - \text{Arg } z$, nous obtiendrions de manière analogue :

$$(3/26) \quad h(z) = \frac{e^{i\pi(\lambda-1)}}{\Gamma(\lambda)} \int_{P_2} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta,$$

formule qui représente une intégrale particulière de (3/17).

Si λ est entier positif, les deux formules (3/25) et (3/26) se réduisent formellement à (3/9), la coupure du plan ζ pouvant être supprimée; toutefois, ces deux formules ne représentent pas nécessairement la même intégrale de (3/17), la réduction de P_1 à P_2 pouvant comporter la traversée de points ρ_f .

3,23 Comparaison des résultats.

La comparaison des formules (3/21), (3/22), (3/25) suivra les mêmes lignes qu'au § 3,13; toutefois, la démonstration « directe » du § 3,13 n'est plus ici applicable sous la forme où elle avait été employée; en outre, la comparaison sera limitée à des chemins assez particuliers, mais suffisants pour la suite (§ 5,245).

3,231 COMPARAISON DANS LE CAS $\lambda > 0$.

Il s'agit ici de comparer (3/21) et (3/25).

On peut écrire, compte tenu de (2/26) :

$$(3/21) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} H_j^1,$$

avec :

$$(3/27) \quad H_j^1 = (-\rho_j)^{\lambda-1} e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^\lambda} dt;$$

$$(3/25) \quad h(z) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} H_j^2,$$

avec :

$$(3/28) \quad H_j^2 = \frac{e^{-i\pi(\lambda-1)}}{\Gamma(\lambda)} \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1} d\zeta}{\zeta - \rho_j}.$$

Si H_j^1 , H_j^2 sont égales pour des chemins C_j et P_1 convenables, il en sera de même de (3/21), (3/25), si la correspondance (C_j, P_1) vaut pour tout j .

Nous écrirons seulement H^1 et H^2 au lieu de H_j^1 et H_j^2 .

Équation différentielle vérifiée par H^1 et H^2 .

On vérifie aisément que H^1 et H^2 sont deux intégrales de la même équation différentielle :

$$\frac{dH}{dz} - \rho H = \frac{1}{z^\lambda}.$$

Pour H^1 , (3/20) est essentielle (cf. Rem., § 3,21) pour la démonstration; pour H^2 , on s'appuie sur les calculs du § 3,222.

Il résulte de là que $H^2 = H^1 + A e^{\rho z}$, où A est une constante, dont nous allons chercher à montrer que la valeur est 0.

Transformation préalable de H^1 et H^2 .

Même méthode qu'au § 3,13. Nous aurons :

$$(3/29) \quad H^1 = (-\rho)^{\lambda-1} \int_{C'} \frac{e^\tau}{(\tau - \rho z)^\lambda} d\tau \quad (t + \rho z = \tau),$$

C' étant un chemin du plan τ qui :

- part de l'infini dans le demi-plan $\Re \tau \leq 0$;
- aboutit à l'origine;

— ne passe pas par ρz , $\text{Arg} (\tau - \rho z)$ variant sur ce chemin d'une manière continue, de sorte que la relation transformée de (3/20) soit vérifiée.

$$(3/30) \quad H^2 = \frac{e^{-i\pi(\lambda-1)}}{z^{\lambda-1} \cdot \Gamma(\lambda)} \int_{P'_1} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^{\lambda-1}}{\tau - \rho z} d\tau \quad (z\zeta = \tau),$$

P'_1 étant un chemin du plan τ qui :

— part de l'infini dans le demi-plan $\mathcal{R} \tau < 0$, avec $\frac{\pi}{2} < \text{Arg} \tau < \pi$;

— aboutit à l'origine sans passer par ρz et sans traverser la coupure située ici sur le demi-axe réel négatif.

Théorème.

« Si P'_1 et C' sont deux chemins réductibles l'un et l'autre, sans passer par ρz , à une demi-droite Δ d'angle polaire compris entre $\frac{\pi}{2}$ (exclu) et π , on a $H^2 = H^1$. »

Il est loisible de supposer que le support de Δ ne passe pas par ρz .

On démontre alors, comme au § 3,13, que H^2 et H^1 tendent vers zéro quand z tend vers l'infini avec un argument donné.

Si alors, $\mathcal{R} (\rho z) > 0$ (strictement), on en déduit que $A = 0$. Sinon, on utilise le fait que H^2 et H^1 sont des fonctions holomorphes de z tant que ρz n'appartient pas à Δ ; $H^2 - H^1$ étant nulle pour $\mathcal{R} (\rho z) > 0$ sera nulle pour tout z tel que ρz non sur Δ .

Remarque.

Si C' était réductible à une demi-droite Δ d'angle polaire compris entre π et $3\frac{\pi}{2}$, il faudrait prendre P'_2 , et dans ce cas (3/21) se ramènerait à (3/26).

3,232 COMPARAISON AVEC (3/22).

Nous comparerons (3/21) et (3/22) dans le cas $\lambda > 0$, mais non entier, en passant par l'intermédiaire de (3/25).

Nous remarquerons pour cela que les coupures dont nous nous sommes servis aux §§ 3,221 et 3,222 peuvent être déplacées pourvu qu'elles continuent à appartenir au demi-plan $\mathcal{R} (z\zeta) < 0$ (strictement).

Supposons alors que C'_j puisse être réduit, pour tout j , à une demi-droite Δ dont l'angle polaire est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π . Alors $h(z)$, défini par (3/21) coïncide, d'après le théorème précédent, avec $h(z)$ défini par (3/25), si P'_1 est réductible à Δ , sans traverser aucun ρz . Revenons alors au plan ζ ($\tau = z\zeta$) et désignons par Δ' la demi-droite qui correspond à Δ dans ce changement de variable. P_1 sera confondu avec Δ' , et la coupure du plan ramenée sur Δ' , de manière que Δ' en soit le bord « supérieur ». Si l'on prend pour P_2 le bord « inférieur », on passera de P_1 à P_2 en changeant ζ en $\zeta e^{-2i\pi}$, d'où l'on déduit :

$$\int_{P_2} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta = e^{-2i\pi\lambda} \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta.$$

Appelons alors $\mathcal{C}_0$ le chemin $P_2 - P_1$ (coupure décrite dans le sens direct); il vient :

$$\int_{\mathcal{C}_0} = \int_{P_2} - \int_{P_1} = (e^{-2i\pi\lambda} - 1) \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta.$$

Mais :

$$e^{-2i\pi\lambda} - 1 = -e^{-i\pi\lambda} \cdot 2i \sin \pi\lambda = \frac{e^{-i\pi(\lambda-1)}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{2i\pi}{\Gamma(1-\lambda)},$$

d'après la formule des compléments pour la fonction Γ ; il en résulte immédiatement :

$$h(z) = \frac{e^{-i\pi(\lambda-1)}}{\Gamma(\lambda)} \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta + \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_0} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta,$$

ce qui nous redonne bien (3/22) avec le chemin $\mathcal{C}_0$ indiqué, ou tout autre chemin qui lui est réductible sans traverser aucun ρ_j .

3,3 GÉNÉRALISATION POSSIBLE DE LA MÉTHODE DE LAPLACE

Reprenons l'équation (3/1), le second membre $E(z)$ étant quelconque.

Cherchons une intégrale de (3/1) sous la forme :

$$(3/31) \quad h(z) = \int_P e^{z\zeta} \frac{g(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta,$$

le chemin P étant choisi de manière à permettre la dérivation sous le signe somme. Par substitution, on obtient comme plus haut :

$$\prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) h(z) = \int_P e^{z\zeta} \cdot g(\zeta) d\zeta.$$

La détermination de $g(\zeta)$ est ramenée à la recherche d'une solution de l'équation intégrale de première espèce dans le domaine complexe :

$$(3/32) \quad \int_P e^{z\zeta} \cdot g(\zeta) d\zeta = E(z),$$

où les inconnues sont la fonction $g(\zeta)$ et le chemin P .

Le problème est donc ramené à chercher une représentation intégrale de $E(z)$ avec noyau de LAPLACE. On peut donc énoncer le résultat suivant :

« Si l'on connaît une représentation intégrale avec noyau de LAPLACE pour la fonction $E(z)$, on peut exprimer de manière analogue, grâce à (3/31), une intégrale particulière de l'équation différentielle (3/1). »

ÉTUDE DU CAS $\alpha = \frac{\pi}{2q}$ (q entier) ⁽¹⁾

4,0

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous allons étudier de façon approfondie le cas où l'angle de plage $\alpha = \frac{\pi}{2q}$ (q entier). L'énoncé du problème est le suivant (cf. § 2,3) :

« Trouver une fonction $f(z)$, analytique dans le domaine $\mathcal{D}$, sans autre singularité à distance finie que l'origine, et telle que :

$$(4/1) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) f(z) = \frac{B_n}{z^{(2n+1)q}};$$

$$(4/2) \quad \Im \left(\frac{df}{dz} + if \right) = 0 \quad (\text{sur } Ox) \quad (z = x \text{ réel});$$

$$(4/3) \quad \Im \left(e^{-i\frac{\pi}{2q}} \frac{df}{dz} \right) = 0 \quad (\text{sur } Ot) \quad (z = r \cdot e^{-i\frac{\pi}{2q}}, r \text{ réel}). »$$

Ici, ρ_j reprend sa signification (2/20), soit :

$$\rho_j = i \cdot e^{i\frac{j\pi}{q}}.$$

L'étude faite par STOKER est limitée au seul cas $n = 0$; nous allons ici chercher la solution la plus générale du problème précédent, ce qui nous permettra de préciser certains des résultats de STOKER [12].

4,1

SOLUTION DU PROBLÈME HOMOGÈNE

Il est très facile de résoudre le problème homogène ($B_n = 0$). Ceci permet de fixer, dans un cas simple, les méthodes qui seront reprises plus loin (§§ 4,2, puis 5,1 et 5,2).

L'intégrale générale de (4/1) homogène est :

$$(4/4) \quad f(z) = \sum_{j=1}^q c_j e^{\rho_j z},$$

où les c_j sont des constantes que nous allons déterminer par les conditions (4/2) et (4/3).

(1) Cf. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, tome 240, 1955, pp. 1189-1191.

Condition (4/2).

Nous avons :

$$M(z) = \frac{df}{dz} + if = \sum_{j=1}^{q-1} c_j (\rho_j + i) e^{\rho_j z},$$

le terme $j = q$ disparaissant, d'après $\rho_q + i = 0$.

La condition (4/2) peut être remplacée par la condition équivalente :

$$M(x) = \overline{M(x)}.$$

Pour former $\overline{M(x)}$, nous effectuons la sommation en changeant j en $q - j$, ce qui donne, compte tenu de (2/21), donc de :

$$e^{c_{q-j} x} = e^{c_j x},$$

l'expression :

$$\overline{M(x)} = \sum_{j=1}^{q-1} \bar{c}_{q-j} (\rho_j - i) e^{\rho_j x}.$$

Égalons cette expression à $M(x)$ pris sous sa forme initiale; puisque les fonctions $\exp(\rho_j z)$ sont linéairement indépendantes, il vient :

$$(4/5) \quad \bar{c}_{q-j} (\rho_j - i) = c_j (\rho_j + i) \quad (j = 1, 2, \dots, q-1).$$

Condition (4/3).

Nous avons :

$$N(r) = e^{-i\frac{\pi}{2q}} \cdot \frac{df}{dz} = \sum_{j=1}^q c_j \left(\rho_j e^{-i\frac{\pi}{2q}} \right) e^{\rho_j z} \quad \left(z = r \cdot e^{-i\frac{\pi}{2q}} \right),$$

ce qui permet de remplacer (4/3) par la condition équivalente :

$$N(r) = \overline{N(r)} \quad (r \text{ réel positif}).$$

Pour former $\overline{N(r)}$, nous effectuons la sommation en changeant j en $q - j + 1$; mais, d'après (2/21) et (2/22), nous avons :

$$\rho_{q-j+1} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2q}} = \rho_j e^{-i\frac{\pi}{2q}},$$

d'où :

$$\exp(\rho_{q-j+1} z) = \overline{\exp(\rho_j z)} \quad \text{pour} \quad z = r \cdot e^{-i\frac{\pi}{2q}};$$

d'où :

$$\overline{N(r)} = \sum_{j=1}^q \overline{c_{q-j+1}} \left(\rho_j e^{-i\frac{\pi}{2q}} \right) e^{\rho_j z}.$$

En égalant cette expression à $N(r)$ pris sous sa forme initiale, nous obtenons :

$$(4/6) \quad \overline{c_{q-j+1}} = c_j \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Conclusion.

Les relations (4/5) et (4/6) nous permettent d'appliquer le théorème du § 2,51, d'où il résulte que c_j sera, à un facteur réel multiplicatif près, égal à a_j , défini par (2/23). Nous adopterons $c_j = a_j$, de sorte que la solution du problème homogène, que nous appellerons $f_0(z)$, aura pour expression :

$$(4/7) \quad f_0(z) = \sum_{j=1}^q a_j \cdot e^{\rho_j z}.$$

Du fait de notre définition des a_j et du choix qu'on vient de faire pour c_j , nous avons :

$$f_0(0) = 1,$$

alors que chez STOKER, la valeur correspondante est $\pi\sqrt{q}$.

4,2 SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME — SOLUTIONS FONDAMENTALES

Dans le cas général, l'équation (4/1) est non homogène; nous utiliserons pour l'intégrer les résultats du § 3,1.

4,21 Intégrale générale de (4/1).

Nous nous servirons ici de la méthode de la variation des constantes (§ 3,11). D'après la formule (3/7) l'intégrale générale de (4/1) est :

$$(4/8) \quad f(z) = \sum_{j=1}^q \left\{ \gamma_j e^{\rho_j z} + B_n (-1)^{nq+q-1} a_j e^{\rho_j z} \int_{c_j} \frac{e^t dt}{t^{(2n+1)q}} \right\},$$

si l'on tient compte de ce que :

$$\rho_j^{2nq} = (-1)^{nq} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_j^{q-1}}{\sigma_j} = a_j;$$

le chemin d'intégration part de $-\infty$ sur l'axe réel du plan t , et aboutit au point $-\rho_j z$ sans passer par l'origine.

Pour $n < 0$, il n'y a pas lieu de préciser plus ce chemin; par contre, pour $n \geq 0$, l'origine étant pôle de l'intégrant, il nous faut préciser la position du chemin par rapport à l'origine, avant toute détermination des γ_j par les conditions aux limites.

Nous remarquons au préalable qu'un argument de $-\rho_j z$ est $-\frac{\pi}{2} + j\frac{\pi}{q} + \text{Arg } z$, en sorte que, pour tout j et pour tout z de $\mathcal{D}$:

$$-\frac{\pi}{2} < \text{Arg } (-\rho_j z) \leq \frac{\pi}{2};$$

par suite, les points $-\rho_j z$ appartiennent tous au demi-plan $\Re t \geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que pour $j = q$ et $z = x$ (surface libre).

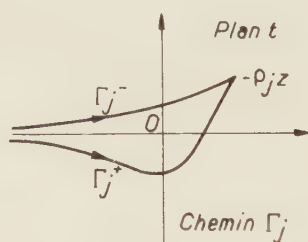


Fig. 12

Il est commode, pour faciliter la traduction des conditions aux limites, d'adopter un chemin d'intégration Γ_j , composé de deux branches Γ_j^+ et Γ_j^- (fig. 12), qui :

- partent toutes deux de $-\infty$ sur l'axe réel du plan t ;
- aboutissent toutes deux à $-\rho_j z$;
- tournent autour de l'origine dans le sens direct (pour Γ_j^+), dans le sens rétrograde (pour Γ_j^-).

Faisant la demi-somme des formules (4/8) correspondant à Γ_j^+ et Γ_j^- , on obtient l'intégrale générale de (4/1) sous la forme :

$$(4/9) \quad f(z) = \sum_{j=1}^q \left\{ \gamma_j e^{\rho_j z} + \frac{1}{2} B_n (-1)^{nq+q-1} a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{(2n+1)q}} \right\},$$

où l'on a encore désigné les constantes arbitraires par γ_j , pour ne pas multiplier les notations.

Remarques.

— On pourrait, mais c'est sans intérêt ici, élargir la condition relative au point de départ des deux branches de Γ_j .

— Le chemin d'intégration adopté par STOKER [12] est un chemin continu à une seule branche partant de $+\infty$ sur l'axe réel, pour aboutir à $\rho_j z$, en laissant l'origine à

gauche; avec ce chemin, la traduction des conditions aux limites est un peu plus compliquée qu'ici. Il est d'ailleurs facile, grâce au théorème des résidus, de passer du chemin Γ_j au chemin Γ_j^+ .

— Le chemin adopté par LEWY [5] est un chemin réductible au segment de droite $[1, -\rho_j z]$; dans ce cas, la traduction des conditions aux limites se fait comme au § 4,22 mais, par contre, l'étude à l'infini est moins simple.

4,22 Traduction des conditions aux limites.

La méthode est celle du § 4,1. Pour simplifier l'écriture, posons :

$$L_{j,(2n+1)q} = \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{(2n+1)q}}$$

Propriétés des intégrales $L_{j,(2n+1)q}$.

1° Sur la surface libre (z réel positif) :

$$(4/10) \quad L_{q-j,(2n+1)q} = L_{j,(2n+1)q} \quad (j = 1, 2, \dots, q-1).$$

D'après (2/21) pour $z = x$, les points $-\rho_{q-j} z$ et $-\rho_j z$ seront symétriques par rapport à l'axe réel du plan t ; par conséquent, les symétriques de Γ_j^+ , Γ_j^- seront des chemins Γ_{q-j}^- , Γ_{q-j}^+ (resp); donc, Γ_{q-j} peut être pris symétrique de Γ_j par rapport à l'axe réel; les intégrales portant sur la même fonction seront donc conjuguées, puisque les valeurs de cette fonction pour t et $\bar{t}$ sont conjuguées;

2° sur le fond ($z = r \cdot e^{-i\frac{\pi}{2q}}$, r réel positif) :

$$(4/11) \quad L_{q-j+1,(2n+1)q} = \overline{L_{j,(2n+1)q}} \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Même raisonnement que dans le cas précédent, en remarquant que pour z sur le fond, les points $-\rho_{q-j+1} z$ et $-\rho_j z$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Calcul de $f'(z)$.

Si l'on observe que :

$$\frac{d}{dz} L_{j,(2n+1)q} = \frac{2(-1)^{nq+q-1} e^{-\rho_j z}}{\rho_j^{q-1} \cdot z^{(2n+1)q}}$$

et que, d'après (2/40), $\sum_{j=1}^q \frac{a_j}{\rho_j^{q-1}} = 0$, la dérivée $f'(z)$ s'écrit :

$$f'(z) = \sum_{j=1}^q \left\{ \gamma_j \rho_j e^{\rho_j z} + \frac{1}{2} B_n (-1)^{nq+q-1} a_j \rho_j e^{\rho_j z} L_{j,(2n+1)q} \right\}$$

quand on dérive $f(z)$ sous la forme (4/9).

Condition (4/2).

On se reportera aux calculs correspondants du § 4,1; il suffit d'ajouter aux relations utilisées, les relations (2/27) pour a_j et (4/10) pour $L_{j,(2n+1)q}$; on trouve alors que les conditions nécessaires et suffisantes pour que (4/2) soit vérifiée sont :

$$(4/12) \quad \gamma_{q-j}(\rho_j - i) = \gamma_j(\rho_j + i) \quad (j = 1, 2, \dots, q-1).$$

Condition (4/3).

On tiendra compte des relations (2/28) pour a_j et (4/11) pour $L_{j,(2n+1)q}$; les calculs sont alors ceux du § 4,1 et l'on trouve :

$$(4/13) \quad \gamma_{q-j+1} = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Conclusion.

D'après le théorème du § 2,51, nous déduisons de (4/12) et (4/13) que $\gamma_j = A \cdot a_j$, où A est une constante réelle arbitraire; d'où l'expression explicite de la solution générale du problème, qui correspond à une valeur donnée de n :

$$(4/14) \quad f(z) = A \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} + \frac{1}{2} B_n (-1)^{nq+q-1} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{(2n+1)q}}.$$

4,23 Solutions fondamentales du problème.

L'expression (4/14) apparaît comme une combinaison linéaire à coefficients réels de $f_0(z)$ défini par (4/7) et de la fonction :

$$\frac{1}{2} B_n (-1)^{nq+q-1} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{(2n+1)q}}$$

qui est donc une intégrale particulière de (4/1) vérifiant les conditions aux limites (4/2) et (4/3).

Nous appellerons « *solutions fondamentales* » du problème initial tel qu'il a été posé au § 1,7, les fonctions suivantes :

$$(4/7) \quad f_0(z) = \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z};$$

$$(4/15) \quad f_{1,\lambda}(z) = \frac{1}{2} C_n \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^\lambda} \quad [\lambda = (2n+1)q],$$

où C_n est une constante réelle qui sera choisie de manière à simplifier les formules ultérieures. Remarquons que (4/15) est solution de (4/1) avec :

$$B_n = (-1)^{nq+q-1} C_n.$$

Si donc nous nous reportons à ce qui a été dit au § 2,3, nous pouvons énoncer :

« La fonction $f(z)$ la plus générale qui, dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{2q}$, vérifie les conditions imposées au potentiel complexe d'ondes liquides 2 D (§ 1,7), et qui n'admet d'autre singularité à distance finie que l'origine, est une combinaison linéaire à coefficients réels, finie ou infinie, des solutions fondamentales (4/7), (4/15). »

Comme il a été dit au § 2,3, nous ne retiendrons que les combinaisons linéaires finies des solutions fondamentales.

4,24 Autres représentations des solutions fondamentales.

Distinguons deux cas suivant le signe de n :

Premier cas : $n < 0$.

Posons $n = -m$. Dans ce cas, les deux branches de Γ_j sont réductibles l'une à l'autre; en outre, si nous posons, $t + \rho_j z = \tau$ dans (4/15); tout chemin d'intégration allant dans le plan τ de $-\infty$ à 0 peut être ramené sur le demi-axe réel négatif, d'où :

$$f_{1, -(2m-1)q}(z) = C_n \sum_{j=1}^q a_j \int_{-\infty}^0 e^{\tau - \rho_j z} (\tau - \rho_j z)^{(2m-1)q} d\tau.$$

Cette expression est donc un polynôme en z ; plus précisément, c'est l'intégrale polynôme de l'équation :

$$\prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) f(z) = (-1)^{nq+q-1} C_n \cdot z^{(2m-1)q}.$$

Appliquons la formule (3/24) en convenant de prendre $C_n = \frac{(-1)^{q-1}}{(2mq - q)!}$; il vient :

$$f_{1, -(2m-1)q}(z) = (-1)^{nq} \text{Résidu}_{\zeta=0} \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{(2m-1)q+1} \cdot R(\zeta)}$$

ou encore, si $\mathcal{C}$ est un contour fermé quelconque contenant l'origine du plan ζ mais aucun point ρ_j à son intérieur :

$$(4/16) \quad f_{1, -(2m-1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq}}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{z\zeta} d\zeta}{\zeta^{(2m-1)q+1} \cdot R(\zeta)}.$$

Deuxième cas : $n \geq 0$.

Il est indiqué de prendre ici $C_n = \frac{1}{\pi} (2nq + q - 1)!$, c'est-à-dire :

$$(4/17) \quad f_{1, (2n+1)q}(z) = \frac{1}{2\pi} (2nq + q - 1)! \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{(2n+1)q}}.$$

Réduction de l'expression (4/17).

Nous allons faire des intégrations par parties sur le modèle :

$$e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j^+} \frac{e^t dt}{t^h} = -\frac{1}{(h-1)(-\rho_j z)^{h-1}} + \frac{1}{h-1} e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j^+} \frac{e^t dt}{t^{h-1}} \quad (h > 1).$$

Quelques calculs simples mettent ainsi (4/17) sous la forme :

$$f_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq+q-1}}{\pi} \left[-\frac{(2nq+q-2)! S_0}{z^{2nq+q-1}} + \dots + (-1)^k \frac{(2nq+q-k-1)! S_{k-1}}{z^{2nq+q-k}} \right] \\ + \frac{1}{2\pi} (2nq+q-k-1)! \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{2nq+q-k}}$$

(pour tout entier $k \leq 2nq + q - 1$), les S_h étant définies par (2/36).

Si l'on tient compte des valeurs nulles de S_h (2/39), on voit que cette formule peut être appliquée, soit pour $k = q - 1$, soit pour $k = 2nq + q - 1$.

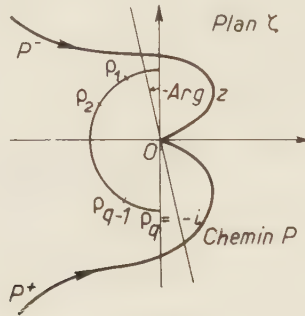


Fig. 13

Pour $k = q - 1$, on trouve immédiatement :

$$(4/18) \quad f_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{1}{2\pi} (2nq)! \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{2nq+1}}.$$

Pour $k = 2nq + q - 1$, les valeurs nulles de S_h font que la sommation en k s'étend seulement de $k = q$ à $k = 2nq$. Nous désignerons par ailleurs simplement par $f_1(z)$ la fonction (4/17) qui correspond à $n = 0$; il vient alors :

$$(4/19) \quad f_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq+q-1}}{\pi} \sum_{k=q}^{2nq} (-1)^k \frac{(2nq+q-k-1)! S_{k-1}}{z^{2nq+q-k}} + f_1(z).$$

Application de la méthode de LAPLACE.

Nous allons transformer (4/17) grâce à la formule (3/9) et au théorème de passage du § 3,13, appliqué séparément à chacune des branches de Γ_j . Nous serons donc amenés à définir un chemin P à deux branches P^+ et P^- (fig. 13), qui laisseront respectivement

à gauche et à droite tous les ρ_j ; les ρ_j sont situés sur le demi-cercle-unité appartenant au demi-plan $\Re \zeta \leq 0$ (§ 2,42).

Finalement, nous aurons le résultat suivant :

P est un chemin du plan ζ à deux branches P^+ et P^- , qui :

- partent de l'infini dans le demi-plan $\Re (z \zeta) < 0$;
- aboutissent toutes deux à l'origine sans passer par aucun point ρ_j ;
- laissent tous les points ρ_j à gauche (pour P^+), à droite (pour P^-).

La fonction (4/17) sera alors donnée par la formule :

$$(4/20) \quad f_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq}}{2\pi} \int_P e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{2nq+q-1} d\zeta}{R(\zeta)}.$$

Cas particulier : $n = 0$.

C'est le cas auquel s'est limité STOKER.

D'après (4/18) nous avons :

$$(4/21) \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t}{t} dt,$$

ce qui peut aussi s'écrire, grâce au théorème des résidus :

$$(4/22) \quad f_1(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \left(\int_{\Gamma_j^+} \frac{e^t}{t} dt - i\pi \right)$$

qui, au changement près de t en $-t$, est la formule de STOKER [12].

Mais, d'après (4/20), on peut aussi écrire :

$$(4/23) \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_P e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{q-1}}{R(\zeta)} d\zeta,$$

qui est l'une des formules de FRIEDRICHS [1]. L'autre formule donnée par FRIEDRICHS est relative à $f_0(z)$, qu'il met sous la forme :

$$(4/24) \quad f_0(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{P^+ - P^-} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{q-1}}{R(\zeta)} d\zeta.$$

Cette formule est une conséquence immédiate de la théorie des résidus, si l'on réduit le chemin $P^+ - P^-$ à un contour fermé entourant tous les ρ_j , et si l'on tient compte de (2/24). Dans son mémoire [1], FRIEDRICHS choisit les branches P^+ et P^- , asymptotes à l'axe réel du plan ζ et symétriques par rapport à cet axe.

Remarques.

— On peut montrer que, dans le cas de la falaise verticale ($q = 1$), la formule (4/23) subsiste avec des branches P^+ et P^- symétriques par rapport à l'axe réel, pourvu que, pour ζ assez grand, ces branches se confondent avec l'axe réel négatif du plan ζ .

— On peut appliquer (3/16) à chaque branche de Γ_j , à condition d'y remplacer n par $2nq + q$, et de multiplier le résultat par $\frac{1}{\pi} (-1)^{nq+q-1} (2nq + q - 1) !$, pour tenir compte de la forme du second membre de l'équation (4/1). On obtient ainsi :

$$(4/25) \quad f_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq}}{2\pi z^{2nq+q-1}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} \int_{\Gamma'_j} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^{2nq+q-1}}{\tau - \rho_j z} \cdot d\tau,$$

Γ'_j étant un chemin à deux branches qui :

- partent toutes deux de l'infini dans le demi-plan $\Re \tau < 0$;
- aboutissent toutes deux à l'origine;
- tournent autour de $\rho_j z$ dans le sens direct (pour Γ'_j), dans le sens rétrograde (pour Γ'_j).

4,3

ÉTUDE A L'ORIGINE ET A L'INFINI DES SOLUTIONS FONDAMENTALES

Remarque préliminaire.

L'étude à l'infini des solutions fondamentales sera faite pour z tendant vers l'infini dans le domaine liquide $\mathcal{D}$ avec un argument donné (autrement dit, z décrivant une demi-droite issue de l'origine et appartenant à $\mathcal{D}$); nous dirons en abrégé que nous faisons *l'étude à l'infini* ($\mathcal{D}$, arg). Ceci évite des difficultés factices du type $\lim \exp(-iz)$ quand z tend vers l'infini dans $\mathcal{D}$ sur une parallèle à la surface libre.

4,31 **Étude de $f_0(z)$.**

$f_0(z)$ est définie par (4/7).

Étude à l'origine.

Nous avons (§ 4,1) $f_0(0) = 1$, donc $f_0(z)$ est *finie* (et même régulière) à l'origine.

Étude à l'infini ($\mathcal{D}$, arg).

Il nous faut étudier $\exp(\rho_j z)$ dans ces conditions.

Si nous reprenons (§ 2,42) la disposition des points ρ_j sur le cercle-unité, nous voyons aisément que les images de $\text{Arg}(\rho_j z)$ (points du cercle-unité qui ont même argument que $\rho_j z$) se situent sur les arcs de cercle décrits à partir de ρ_j , ..., ρ_q dans le sens rétrograde et d'amplitude $\frac{\pi}{2q}$ (moitié de l'arc séparant deux ρ_j consécutifs) (fig. 14). On en déduit que :

$\Re(\rho_j z) < 0$ strictement, pour tout j et tout z dans $\mathcal{D}$, sauf pour $j = q$ et z sur la surface libre ($z = x$), auquel cas $\Re(\rho_q x) = 0$.

Par suite, en dehors de la surface libre, $\exp(\rho_j z) \rightarrow 0$ pour tout j ; sur la surface libre, $\exp(\rho_j z) \rightarrow 0$ pour $j = 1, \dots, q-1$, tandis que pour $j = q$, $\exp(\rho_j z) = \exp(-ix)$ qui reste borné, mais ne tend pas vers zéro.

En conclusion :

$$(4/26) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0(z) \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad \text{à l'infini } (\mathcal{O}, \arg) \text{ en dehors de la surface libre;}$$

$$(4/27) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0(x) \approx a_q e^{-ix} \end{array} \right. \quad \text{lorsque } z = x \rightarrow \infty \text{ sur la surface libre,}$$

le symbole $\approx$ signifiant que la différence des deux membres de (4/27) tend vers zéro dans les conditions indiquées.

Compte tenu de (2/35), on peut aussi écrire :

$$(4/27') \quad f_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-i \left| x + (q-1) \frac{\pi}{4} \right|} \quad (x \rightarrow \infty; \text{ surface libre}).$$

En résumé, la solution $f_0(z)$ est régulière à l'origine bornée à l'infini $(\mathcal{O}, \arg)$; nous l'appellerons en abrégé « solution R.B ».

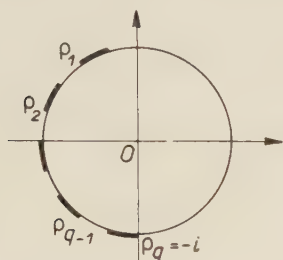


Fig. 14

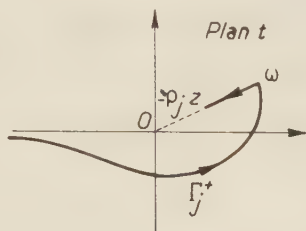


Fig. 15

4,32 Étude de $f_{1,(2n+1)q}(z)$ pour $n < 0$.

Reprenant le premier cas du § 4,24, nous avons :

$$f_{1, -(2m-1)q}(z) = \frac{(-1)^{q-1}}{[(2m-1)q]!} \sum_{j=1}^q a_j \int_{-\tau}^0 e^{\tau} (\tau - \rho_j z)^{(2m-1)q} d\tau,$$

polynôme en z , dont on vérifie que le degré effectif est $(2m-1)q$.

Il en résulte immédiatement que $f_{1, -(2m-1)q}(z)$ est bornée et même régulière à l'origine; et qu'elle est non bornée à l'infini $(\mathcal{O}, \arg)$. Ces solutions seront appelées « solutions R » du problème.

4,33 Étude de $f_{1,(2n+1)q}(z)$ pour $n \geq 0$.

4,331 ÉTUDE A L'ORIGINE.

Cette étude résulte de la formule (4/19), ce qui nécessite l'étude préalable de $f_1(z)$.

Étude à l'origine de $f_1(z)$.

Utilisons, par exemple, la formule (4/22), et supposons que z tende vers zéro dans $\mathcal{O}$ avec un argument donné, en sorte que, dans le plan t , $-\rho_j z$ tend vers l'origine suivant une demi-droite (fig. 15).

Posons — $\rho_j z = \omega |z|$, ω étant constant. Faisons passer Γ_j^+ par ω , et ramenons la branche $(\omega, -\rho_j z)$ de Γ_j^+ suivant le segment qui joint ces deux points. En posant $t = \omega u$ (u réel), nous aurons :

$$\int_{\omega}^{|z|} \frac{e^t}{t} dt = \int_1^{|z|} \frac{e^{\omega u}}{u} du = \text{Log } |z| + \int_1^{|z|} \frac{e^{\omega u} - 1}{u} du,$$

d'où résulte :

$$\int_{\Gamma_j^+} \frac{e^t}{t} dt = \text{Log } |z| + O(1),$$

et par suite :

$$(4/28) \quad f_1(z) \sim \frac{1}{\pi} \text{Log } |z| \quad (z \rightarrow 0),$$

le symbole $\sim$ signifiant, comme il est usuel, que le rapport des deux membres de (4/28) tend vers 1 dans les conditions indiquées.

Donc, la solution fondamentale $f_1(z)$ ($n = 0$) admet l'origine comme singularité logarithmique.

Étude à l'origine de $f_{1,(2n+1)q}(z)$ ($n \neq 0$).

D'après (2/39), la formule (4/19), où l'on explicite le premier terme de la sommation, s'écrit :

$$f_{1,(2n+1)q}(z) = (-1)^{nq-1} \frac{(2nq-1)!}{\pi z^{2nq}} + \dots + f_1(z),$$

d'où résulte, compte tenu de (4/28) :

$$(4/29) \quad f_{1,(2n+1)q}(z) \sim (-1)^{nq-1} \frac{(2nq-1)!}{\pi z^{2nq}} \quad (z \rightarrow 0; n \neq 0).$$

Donc, la solution fondamentale $f_{1,(2n+1)q}(z)$ ($n \neq 0$) admet l'origine comme pôle d'ordre $2nq$.

Conclusion.

Les solutions fondamentales $f_{1,(2n+1)q}(z)$ sont, pour $n \geq 0$, singulières à l'origine; nous les appellerons « solutions S » du problème. La singularité la plus faible admissible est la singularité logarithmique, qui correspond au cas $n = 0$ (STOKER); la solution $f_1(z)$ sera appelée « solution S.L ».

4,332 ÉTUDE À L'INFINI (ω , arg).

La base de cette étude est la formule (4/25) et le lemme suivant :

Lemme. — Si, dans le plan τ , Δ est une demi-droite appartenant au demi-plan $\text{Re } \tau < 0$, et ne passant, ni elle ni son support, par $\rho_j z$:

$$\int_{\Delta} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^h d\tau}{\tau - \rho_j z} \rightarrow 0 \quad \text{quand } z \rightarrow \infty \quad (\omega, \arg).$$

La démonstration est celle que nous avons donné au § 3,13 pour démontrer que H^2 tendait vers zéro sous des conditions analogues.

Modification de la formule (4/25).

D'après la définition de Γ'_j (§ 4,24, Rem.), la branche Γ'_j peut toujours être ramenée à une demi-droite Δ du demi-plan $\Re \tau < 0$, ne passant par aucun $\rho_j z$, et laissant tous ces points à droite. Par contre, Γ'_j ne peut être ramenée à une demi-droite analogue, qui laisse tous ces points à gauche, que si l'on se place en dehors de la surface libre (à cause de $\rho_q x = -ix$). Nous nous ramènerons donc dans (4/25) à Γ'_j , puis à Δ . Le théorème des résidus fournit :

$$f_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq}}{\pi z^{2nq+q-1}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} \int_{\Gamma'_j} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^{2nq+q-1}}{\tau - \rho_j z} d\tau + i \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z}.$$

ce qui nous engage à introduire la fonction :

$$(4/30) \quad \widehat{f}_{1,(2n+1)q}(z) = f_{1,(2n+1)q}(z) - i f_0(z)$$

d'où, si Δ est une demi-droite du demi-plan $\Re \tau < 0$, passant par l'origine, ne passant par aucun $\rho_j z$ et laissant tous ces points à droite :

$$(4/31) \quad \widehat{f}_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq}}{\pi z^{2nq+q-1}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j} \int_{\Delta} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^{2nq+q-1}}{\tau - \rho_j z} d\tau.$$

Application à l'étude à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) de $f_{1,(2n+1)q}(z)$.

Si nous appliquons le lemme à (4/31), nous voyons que $\widehat{f}_{1,(2n+1)q}(z)$ tend vers zéro quand $z \rightarrow \infty$ ($\mathcal{O}$, arg); par suite, d'après (4/30), (4/26), (4/27), on obtient :

$$(4/32) \quad \left(f_{1,(2n+1)q}(z) \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini } (\mathcal{O}, \arg) \text{ en dehors de la surface libre;} \right.$$

$$(4/33) \quad \left(f_{1,(2n+1)q}(x) \approx i a_q \cdot e^{-ix} \quad \text{lorsque } z = x \rightarrow \infty \text{ sur la surface libre,} \right.$$

cette dernière relation pouvant aussi s'écrire, d'après (4/27') :

$$(4/33') \quad f_{1,(2n+1)q}(x) \approx \frac{i}{\sqrt{q}} e^{-i \left[x + (q-1) \frac{\pi}{4} \right]} \quad (x \rightarrow \infty; \text{ surface libre}).$$

Par conséquent, les solutions S du problème sont bornées à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) et elles admettent toutes sur la surface libre le même comportement asymptotique défini par (4/33) ou (4/33').

Développement de $\widehat{f}_{1,(2n+1)q}(z)$ en série asymptotique.

La formule (4/31) permet d'obtenir des résultats plus précis que les précédents. Partons en effet de la relation :

$$\frac{1}{\tau - \rho_j z} = -\frac{1}{\rho_j z} - \frac{\tau}{(\rho_j z)^2} - \dots - \frac{\tau^k}{(\rho_j z)^{k+1}} + \frac{1}{(\rho_j z)^{k+1}} \frac{\tau^{k+1}}{\tau - \rho_j z};$$

on en déduit :

$$\int_{\Delta} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^h d\tau}{\tau - \rho_j z} = (-1)^{h-1} \cdot \frac{h!}{\rho_j z} + \dots + (-1)^{h+k-1} \cdot \frac{(h+k)!}{(\rho_j z)^{k+1}} + \frac{1}{(\rho_j z)^{k+1}} \int_{\Delta} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^{h+k+1}}{\tau - \rho_j z} d\tau$$

si l'on remarque que, pour le calcul de $\int_{\Delta} e^{\tau} \cdot \tau^h d\tau$, Δ peut être ramenée sur le demi-axe réel négatif, d'où :

$$\int_{\Delta} e^{\tau} \cdot \tau^h d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{\tau} \cdot \tau^h d\tau = (-1)^h \cdot h!.$$

Remplaçons dans (4/31); il vient, avec la définition (2/36) des S :

$$(4/34) \quad \widehat{f}_{1,(2n+1)q}(z) = \frac{(-1)^{nq+q}}{\pi z^{(2n+1)q}} \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{(2nq+q+s-1)!}{z^s} S_{-s-1} + R_k;$$

$$(4/35) \quad R_k = \frac{(-1)^{nq}}{\pi z^{2nq+q+k}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{\sigma_j \rho_j^{k+1}} \int_{\Delta} e^{\tau} \cdot \frac{\tau^{2nq+q+k}}{\tau - \rho_j z} d\tau.$$

1° k restant fixe, faisons tendre z vers l'infini ($\mathcal{O}$, arg); d'après le lemme, nous obtenons :

$$R_k = \frac{o(1)}{z^{2nq+q+k}}.$$

Appliquons ce résultat, en prenant dans (4/34) le seul terme $s = 0$ dans la sommation; comme $S_{-1} = i$ [d'après (2/43) et (2/37)], on obtient :

$$(4/36) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{1,(2n+1)q}(z) = (-1)^{nq+q} \frac{(2nq+q-1)! i}{\pi z^{(2n+1)q}} + \frac{o(1)}{z^{(2n+1)q}} \\ \text{à l'infini } (\mathcal{O}), \text{ arg) en dehors de la surface libre;} \end{array} \right.$$

$$(4/37) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{1,(2n+1)q}(x) = i a_q e^{-ix} + (-1)^{(n+1)q} \frac{(2nq+q-1)! i}{\pi x^{(2n+1)q}} + \frac{o(1)}{x^{(2n+1)q}} \\ \text{lorsque } z = x \rightarrow \infty \text{ sur la surface libre.} \end{array} \right.$$

Pour obtenir ces résultats, on utilise le fait que $\exp(\rho_j z)$ lorsque $\mathcal{R}(\rho_j z) < 0$ est de la forme $\frac{o(1)}{z^h}$, pour des valeurs arbitraires de h .

Remarquons que si l'on s'intéresse à $\mathcal{R} f_{1,(2n+1)q}(x)$, le terme $s = 0$ dans (4/34) ne suffit pas; il faut prendre le terme $s = 1$.

Les formules (4/36) et (4/37) précisent (4/32), (4/33); en particulier, pour $n = 0$, elles donnent des résultats plus précis que ceux obtenus par STOKER [12];

2° z restant fixe, faisons tendre k vers l'infini.

L'étude correspondante de R_k revient à étudier la nature de la série :

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2nq + q + s - 1)!}{z^s} S_{-s-1}.$$

Mais, la quantité S_{-s-1} ne prend, en dehors de ses valeurs nulles, qu'un ensemble de q valeurs, qu'on déduirait de (2/43) et de la périodicité des S . D'autre part :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(2nq + q + s - 1)!}{z^s} = \infty \quad \text{pour } z \text{ fixé};$$

par suite, le terme général de la série ne tend pas vers zéro et la série diverge.

Il résulte de ce qui précède que $R_k \rightarrow \infty$ quand k tend vers l'infini, z restant fixe. Si l'on rapproche ce résultat du précédent, nous voyons qu'ils correspondent à la définition de POINCARÉ d'une *série asymptotique*, ce qui nous permet de remplacer (4/34) par :

$$(4/38) \quad \widehat{f}_{1,(2n+1)q}(z) \approx \frac{(-1)^{nq+q}}{\pi z^{(2n+1)q}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2nq + q + s - 1)!}{z^s} S_{-s-1},$$

le symbole $\approx$, déjà utilisé, signifiant que la série au second membre est asymptotique. En procédant comme pour (4/36), (4/37) on peut facilement écrire les développements correspondants pour :

$$f_{1,(2n+1)q}(z) \quad \text{et} \quad f_{1,(2n+1)q}(x).$$

4,333 RELATION DE $f_{1,(2n+1)q}(z)$ AVEC LE DÉVELOPPEMENT DE $\widehat{f}_1(z)$ EN SÉRIE ASYMPTOTIQUE.

D'après (4/38), nous aurons :

$$(4/39) \quad \widehat{f}_1(z) \approx \frac{(-1)^q}{\pi z^q} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \cdot \frac{(q + s - 1)!}{z^s} S_{-s-1}.$$

Reprenons d'autre part (4/19), et posons, dans la sommation $\sum_k$, $k = 2nq - s$ (ce qui revient à faire cette sommation à partir de la fin); d'après (2/37), nous aurons $S_{2nq-s-1} = (-1)^{nq} S_{-s-1}$, et par conséquent :

$$\frac{1}{\pi} (-1)^{nq+q-1} \sum_{k=q}^{2nq} = \frac{(-1)^{q-1}}{\pi z^q} \sum_{s=0}^{2nq-q} (-1)^s \frac{(q + s - 1)!}{z^s} S_{-s-1},$$

la sommation au second membre pouvant s'étendre de $s = 0$ à $s = 2nq - 1$ à cause de (2/39). Ce second membre n'est autre que l'opposé de la somme des $2nq$ premiers termes de la série asymptotique (4/39).

D'où ce résultat :

« $f_{1,(2n+1)q}(z)$ est égale à la différence entre $f_1(z)$ et la somme des $2nq$ premiers termes du développement en série asymptotique de $f_1(z) = f_1(z) - if_0(z)$. »

4,34 Alternative régissant les solutions du problème.

L'étude qui précède nous a permis de classer les solutions fondamentales en trois catégories :

- solution R.B : régulière en O, bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg);
- solutions R : régulières en O, non bornées à l'infini ($\mathcal{O}$, arg);
- solutions S : singulières en O, bornées à l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

Toute solution $f(z)$ du problème aux limites, en tant que combinaison linéaire des solutions fondamentales (§ 4,23), sera, en général, à la fois singulière en O et non bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg). En étudiant celles des solutions fondamentales qui interviennent dans les combinaisons linéaires, on obtient les résultats suivants :

« La solution R.B est, à un multiplicateur réel près, la seule solution du problème qui soit à la fois régulière en O et bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg). »

En dehors de la solution R.B, toute autre solution du problème est soumise à l'alternative suivante :

- « Une solution qui est régulière en O n'est pas bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg). »
- « Une solution qui est bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) est nécessairement singulière en O, la singularité *la plus faible* étant logarithmique. »

En particulier, on obtient le résultat suivant, plus large que le résultat analogue de STOKER sous le rapport des hypothèses :

« Les seules solutions du problème aux limites qui soient :

- uniformément bornées à l'infini ($\mathcal{O}$, arg);
- logarithmiquement singulières à l'origine,

sont les solutions R.B, S.L et leurs combinaisons linéaires à coefficients réels. »

4,4 APPLICATION AU PROBLÈME DES ONDES LIQUIDES

4,41 Généralités.

Nous utiliserons dans la suite les notations :

$$\varphi(x, y) = \mathcal{R} f(z) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \varphi(x, 0)$$

avec les mêmes indices que ceux dont est effectuée $f(z)$.

Nous nous proposons de chercher celles des solutions du problème aux limites qui sont des potentiels complexes « physiquement acceptables » pour le problème des ondes liquides. Nous poserons pour cela la définition :

« Une solution $f(z)$ de notre problème sera dite « *physiquement acceptable* » pour le problème des ondes liquides si l'élévation de la surface du liquide qui lui correspond présente à l'infini une *amplitude bornée mais non nulle*. »

D'après l'étude de la surface libre faite au § 1,3, cette condition se traduit par :

$$(4/40) \quad \varphi(x) \quad \text{bornée non nulle quand } x \rightarrow \infty.$$

4,42 Étude des solutions physiquement acceptables.

Élimination des solutions R.

Pour une telle solution prise individuellement, $\varphi(x)$ est un polynôme en x (§ 4,32), donc tend vers l'infini avec x .

On ne peut, d'autre part, inclure une telle solution dans une combinaison linéaire avec les autres solutions, car d'après l'étude à l'infini de ces dernières, on voit que la solution R imposerait son comportement à l'infini sur la surface libre.

Par conséquent, d'après l'alternative du § 4,34, toute solution physiquement acceptable sera, mise à part la solution R.B, *singulière en O*.

Solution R.B.

Elle est physiquement acceptable, et, d'après (4/27') :

$$(4/41) \quad \varphi_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \left[x + (q-1) \frac{\pi}{4} \right] \quad (x \rightarrow \infty).$$

Après réintroduction du facteur temps, on voit que cette solution conduit à la surface du liquide à des *ondes stationnaires*, pour lesquelles les nœuds sont donnés asymptotiquement par :

$$x \approx -\frac{q+1}{4} \pi \quad (\text{mod } \pi).$$

Cette onde sera appelée « *onde bornée sur la rive* » et sera étudiée plus en détail au § 4,6.

Solutions S.

Toutes ces solutions sont physiquement acceptables, mais du fait de la singularité à l'origine, on convient (comme cela a déjà été fait au § 1,6 pour une autre raison) que la représentation ici obtenue n'est pas valable au voisinage immédiat du rivage.

D'après (4/33') on a :

$$(4/42) \quad \varphi_{1,(2n+1)q}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \left[x + (q-1) \frac{\pi}{4} \right] \quad (x \rightarrow \infty).$$

Après réintroduction du facteur temps, nous obtenons des *ondes stationnaires* à la surface du liquide, dont les nœuds ont pour position asymptotique :

$$x \approx -\frac{q-1}{4}\pi \pmod{\pi},$$

c'est-à-dire sont les milieux des nœuds de l'onde bornée sur la rive.

Il est remarquable de constater que ces résultats sont indépendants de n , autrement dit que toutes les solutions S conduisent aux mêmes résultats.

Les ondes obtenues seront dites « ondes infinies sur la rive »; en particulier, pour $n = 0$, on obtient l'onde logarithmiquement infinie considérée par STOKER; on en reprendra l'étude au § 4,7.

4,43 Formation d'ondes progressives se dirigeant vers la rive.

Prenons comme onde de référence, au point de vue amplitude et phase à l'infini sur la surface libre, l'onde R.B. Si l'on considère le potentiel des vitesses dépendant du temps :

$$(4/43) \quad \varphi(x, y, t) = a[\varphi_0(x, y) \cos(\psi + t) - \varphi_{1,(2n+1)q}(x, y) \cdot \sin(\psi + t)],$$

où a et ψ sont deux constantes quelconques ($a > 0$), nous aurons à l'infini sur la surface libre, d'après (4/41) et (4/42) :

$$(4/44) \quad \varphi(x, 0, t) \approx \frac{a}{\sqrt{q}} \cos \left[x + t + (q-1)\frac{\pi}{4} + \psi \right] \quad (x \rightarrow \infty),$$

ce qui montre que l'onde associée sur la surface est une onde progressive se dirigeant vers le rivage (donc, figurative de la *houle*) et qu'à l'infini son amplitude est a et sa phase ψ (pour $t = 0$) par rapport à l'onde de référence, autrement dit sont arbitraires.

Mais, comme n est arbitraire dans (4/43), on en conclut qu'à une amplitude et une phase données à l'infini il correspond une infinité d'ondes progressives, qui diffèrent par leur comportement à l'origine. Toutefois, si l'on tient compte du résultat d'unicité du § 4,34 (*in fine*), on obtient le résultat suivant :

« A une amplitude et une phase données à l'infini, il ne correspond qu'une seule onde progressive se dirigeant vers la rive si l'on suppose cette onde *logarithmiquement infinie à l'origine*. »

Par contre, l'unicité est détruite si l'on suppose une singularité plus forte à l'origine (onde infinie comme $\frac{1}{z^{2nq}}$). Ce fait s'explique aisément en remarquant que, dans ce cas, il existe des solutions du problème aux limites qui tendent vers zéro, quand z tend vers l'infini dans $\mathcal{O}$, *surface libre comprise*, ou, comme nous dirons, des solutions « totalement évanescents » à l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

D'après l'étude à l'infini des solutions fondamentales, il est évident que ces solutions « totalement évanescents » seront formées à partir des différences de deux

fonctions $f_{1,(2n+1)q}(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) par combinaisons linéaires à coefficients réels. Prenons, par exemple :

$$(4/45) \quad \mathcal{F}_n = f_{1,(2n+1)q}(z) - f_{1,(2n-1)q}(z) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si l'on fait une combinaison linéaire à coefficients réels de la solution correspondant à l'onde progressive logarithmiquement infinie sur la rive avec $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$, on trouve aisément le résultat :

« A une amplitude et une phase données à l'infini, il correspond $\propto n'$ ondes progressives qui, sur la rive, sont infinies comme $\frac{1}{z^{2n'q}}$. »

Expression explicite des fonctions $\mathcal{F}_n$.

Le calcul est facile à partir du résultat du § 4,333; on trouve :

$$\mathcal{F}_n = \frac{(-1)^{q-1}}{\pi z^q} \sum_{s=2(n-1)q}^{2nq-q} (-1)^s \frac{(q+s-1)!}{z^s} S_{-s-1}.$$

Posons, dans la sommation, $s = 2(n-1)q + r$ ($0 \leq r \leq q$); il vient :

$$S_{-s-1} = (-1)^{(n-1)q} S_{-r-1} \quad \text{avec} \quad S_{-r-1} = (-1)^r (b_{r-1} + ib_r)$$

et :

$$S_{-1} = i, \quad S_{-q-1} = (-1)^q,$$

d'après l'étude du § 2,6. Il en résulte :

$$(4/46) \quad \mathcal{F}_n = \frac{(-1)^{nq-1}}{\pi z^{(2n-1)q}} \left[(2nq - q - 1)! i + \frac{(2nq - q)!}{z} (1 + ib_1) \right. \\ \left. + \dots + \frac{(2nq - q + r - 1)!}{z^r} (b_{r-1} + ib_r) + \dots + \frac{(2nq - 2)!}{z^{q-1}} (b_{q-2} + i) + \frac{(2nq - 1)!}{z^q} \right],$$

forme sur laquelle il est évident que $\mathcal{F}_n$ est analytique dans tout le plan z , origine exceptée, tend vers zéro à l'infini dans tout le plan; en outre, un calcul simple permettrait de vérifier que $\mathcal{F}_n$ satisfait bien aux conditions aux limites (4/2) et (4/3).

4,5 ÉTUDE PARTICULIÈRE DU CAS DE LA FALAISE VERTICALE ($q = 1$)

Cette étude est intéressante en raison de la simplicité des formules correspondantes. Elle prépare en outre à l'étude plus générale et moins simple qui sera faite aux §§ 4,6 et 4,7.

4,50 Énoncé du problème.

Il n'y a plus ici qu'une seule quantité ρ_j : $\rho_1 = -i$, si bien que l'équation différentielle (4/1) devient :

$$(4/47) \quad \frac{df}{dz} + if = \frac{B_n}{z^{2n+1}} \quad (B_n \text{ réel})$$

et, par suite, la condition (4/2) est satisfaite d'elle-même. En outre, on peut transformer (4/3) à l'aide de (4/47). On obtient ainsi l'énoncé simplifié du problème dans le cas de la falaise verticale (fig. 16) :

« Trouver une fonction $f(z)$ analytique dans le quadrant $\mathcal{O}$ ($x \geq 0, y \leq 0$), sans autre singularité à distance finie que l'origine, et telle que :

$$(4/47) \quad \frac{df}{dz} + if = \frac{B_n}{z^{2n+1}} \quad (B_n \text{ réel});$$

$$(4/48) \quad \Im f = 0 \quad \text{sur} \quad Oy'.$$

Le cas étudié par STOKER [12] est toujours le cas $n = 0$.

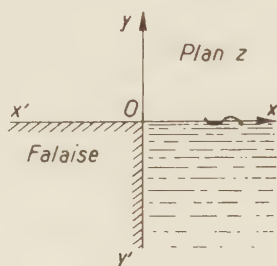


Fig. 16

On s'assure aisément que (4/48) équivaut à la condition que la vitesse d'une particule fluide située sur Oy' soit tangente à la falaise. Car, si :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

d'après (4/48), $\psi(0, y) \equiv 0$ en y ; donc, $\psi_y = 0$ sur la falaise, et puisque $\varphi_x = \psi_y$ (conditions de CAUCHY-RIEMANN), on aura bien $\varphi_x = 0$ sur la falaise.

Il serait facile de reprendre sur l'énoncé précédent les calculs des §§ 4,1, 4,2, 4,3, calculs qui sont ici considérablement simplifiés; c'est ce qu'a fait STOKER [12] pour le cas $n = 0$. Nous nous bornerons à indiquer les résultats correspondants.

4,51 Solutions fondamentales.

Il n'intervient plus ici qu'une seule quantité a_j : $a_1 = 1$. L'expression des solutions fondamentales est alors la suivante :

$$(4/49) \quad f_0(z) = e^{-iz} \quad (\text{solution R.B});$$

$$(4/50) \quad f_{1, -(2m-1)}(z) = \frac{1}{(2m-1)!} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} (\tau + iz)^{2m-1} d\tau \quad (\text{solutions R});$$

$$(4/51) \quad f_{1, 2n+1}(z) = \frac{1}{2\pi} (2n)! e^{-iz} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t dt}{t^{2n+1}} \quad (\text{solutions S}),$$

où, dans (4/50) τ est réel, dans (4/51) le chemin Γ_j est le chemin à deux branches défini au § 4,21, le point d'aboutissement iz des deux branches étant ici dans le premier quadrant du plan t .

En ne conservant que la branche Γ_j^+ de Γ_j , on peut aussi écrire (4/51) sous la forme :

$$(4/51') \quad f_{1,(2n+1)}(z) = \frac{1}{\pi} (2n)! e^{-iz} \int_{\Gamma_j^+} \frac{e^t}{t^{2n+1}} dt - ie^{-iz},$$

d'où, en particulier, pour $n = 0$:

$$(4/52) \quad f_1(z) = \frac{1}{\pi} e^{-iz} \left(\int_{\Gamma_j^+} \frac{e^t}{t} dt - i\pi \right)$$

qui est, au changement près de t en $-t$ dans l'intégrale, la formule utilisée par STOKER [12].

La formule (4/19) peut ici s'écrire, en remarquant qu'ici $S_h = (-i)^h$, sous la forme :

$$(4/53) \quad f_{1,(2n+1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(2n-1)!}{(iz)^{2n}} + \frac{(2n-2)!}{(iz)^{2n-1}} + \dots + \frac{1}{iz} \right] + f_1(z).$$

La formule (4/20), résultat de l'application de la méthode de LAPLACE, s'écrit ici :

$$(4/54) \quad f_{1,2n+1}(z) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_P e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{2n}}{\zeta + i} d\zeta,$$

le chemin P ayant été défini au § 4,24; plus particulièrement, pour $n = 0$, on a :

$$(4/55) \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_P e^{z\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + i},$$

formule à laquelle s'applique la première remarque de la fin du § 4,24.

Les résultats obtenus aux §§ 4,3 et 4,4 s'appliquent ici sans modification; signalons seulement le développement en série asymptotique de $\widehat{f}_{1,2n+1}(z)$ qu'on peut ici écrire :

$$(4/56) \quad \widehat{f}_{1,2n+1}(z) \approx \frac{(-1)^n}{\pi z^{2n}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2n+s)!}{(iz)^{s+1}}.$$

4,52 Étude des vitesses.

Nous nous servirons de la vitesse complexe $f'(z) = \varphi_x - i \varphi_y$.

Pour $f_0(z)$, on a :

$$f'_0(z) = -e^y (\sin x + i \cos x),$$

quantité dont le module reste borné dans $\mathcal{O}$, et décroît exponentiellement vers zéro quand $y \rightarrow -\infty$.

Pour $f_{1,2n+1}(z)$, avec $n \geq 0$, pour que la solution soit physiquement acceptable (§ 4,4), on trouve :

$$f'_{1,2n+1}(z) = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{\pi z^{2n+1}} - \frac{1}{2\pi} (2n)! i e^{-iz} \int_{\Gamma_j} \frac{e^l}{l^{2n+1}} dl,$$

quantité non bornée au voisinage de l'origine. Étudions son comportement quand z tend vers l'infini ($\mathcal{O}$, arg) en dehors de la surface libre.

D'après (4/32), nous voyons que la vitesse *tend vers zéro* à l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

Mais on peut préciser, en utilisant (4/34) avec deux termes dans la sommation Σ_k , c'est-à-dire :

$$f_{1,2n+1}(z) = (-1)^{n+1} \frac{(2n)! i}{\pi z^{2n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!}{\pi z^{2n+2}} + o(1) \quad (z \rightarrow \infty),$$

d'où :

$$f'_{1,2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n+1)! i}{z^{2n+2}} + o(1) \quad (z \rightarrow \infty).$$

La décroissance de la vitesse n'est donc plus exponentielle, mais elle tend vers zéro à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) comme $\frac{1}{z^{2n+2}}$, et, en particulier, comme $\frac{1}{z^2}$ pour $n = 0$.

Stoker donne par erreur, pour $n = 0$, une loi de décroissance en $\frac{1}{z}$; cette erreur tient à une étude de $f(z)$ à l'infini insuffisamment précise.

Ce résultat montre que toutes les solutions S conduisent à des mouvements du liquide, dans lesquels les vitesses tendent vers zéro à l'infini dans la masse liquide, surface libre exclue. Si donc on imposait une telle condition *a priori* dans les hypothèses (d'une manière analogue à ce qu'on a fait au § 4,41), on voit qu'elle ne permettrait pas de choisir entre les différentes solutions S.

Remarque.

Il en est de même si l'on voulait imposer que le flux du vecteur vitesse à travers une cloison verticale immergée dans $\mathcal{O}$ reste fini. Cette condition est remplie par toutes les solutions S; en effet, ce flux a pour expression :

$$\int_{-\infty}^0 \varphi_x \cdot dy \quad (x = C^{\text{te}} \text{ non nulle})$$

et, puisque $f'(z)$ est à l'infini de l'ordre de $\frac{1}{z^{2n+2}}$, φ_y sera en y au moins d'ordre $-(2n+2)$, ce qui permet à l'intégrale précédente de converger.

4,53 Calcul de $\varphi(x, y) = \mathcal{R} f(z)$.

Nous distinguerons différents cas.

4,531 CAS DE $f_0(z)$.

De (4/49) on déduit aussitôt :

$$(4/57) \quad \varphi_0(x, y) = e^y \cdot \cos x.$$

4,532 CAS DE $f_{1, -(2m-1)}(z)$ (SOLUTIONS R).

Dans (4/50), on pose successivement :

$$z = x + iy, \quad \tau - y = -u, \quad x = r \cos \theta, \quad u = r \sin \theta,$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} f_{1, -(2m-1)}(z) &= \frac{1}{(2m-1)!} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} (\tau - y + ix)^{2m-1} d\tau = \frac{-1}{(2m-1)!} e^y \int_y^{+\infty} e^{-u} (u - ix)^{2m-1} du \\ &= \frac{(-1)^m}{(2m-1)!} e^y \int_y^{+\infty} e^{-u} r^{2m-1} [\sin(2m-1)\theta - i \cos(2m-1)\theta] du, \end{aligned}$$

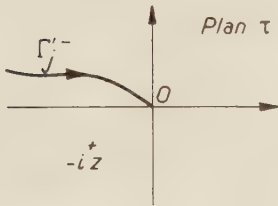


Fig. 17

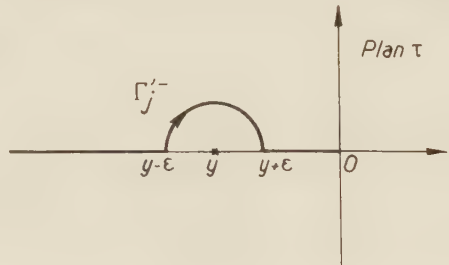


Fig. 18

et par suite :

$$(4/58) \quad \varphi_{1, -(2m-1)}(x, y) = \frac{(-1)^m}{(2m-1)!} e^y \int_y^{+\infty} e^{-u} [r^{2m-1} \sin(2m-1)\theta]_{\substack{x \\ y=u}} du,$$

la notation $[r^{2m-1} \sin(2m-1)\theta]_{\substack{x \\ y=u}}$ signifiant que l'on doit passer des coordonnées polaires (r, θ) aux coordonnées cartésiennes (x, y) correspondantes, puis faire $y = u$ pour intégrer.

4,533 CAS DE $f_{1, (2n+1)}(z)$ (SOLUTIONS S).

On obtient des expressions différentes de $\varphi_{1, 2n+1}(x, y)$ selon que l'on part de (4/51) ou de (4/54).

1° Partons d'abord de (4/51), que nous transcrivons en ne conservant que la branche Γ_j^- de Γ_j et en posant ensuite $t = \tau + iz$, soit :

$$(4/59) \quad f_{1, 2n+1}(z) = \frac{(2n)!}{\pi} \int_{\Gamma_j^-} \frac{e^{\tau}}{(\tau + iz)^{2n+1}} d\tau + ie^{-iz};$$

Γ_j^- étant un chemin du plan τ qui part de l'infini dans le demi-plan $\Re \tau < 0$, aboutit à l'origine en tournant autour de $-iz$ dans le sens rétrograde (fig. 17).

Mais $-iz$ est dans le troisième quadrant du plan τ , ce qui nous permet de ramener $\Gamma'_{\bar{j}}$ sur le demi-axe réel négatif, sauf lorsque $-iz$ s'y trouve, c'est-à-dire sauf lorsque z est sur la falaise. D'où deux cas :

Premier cas : z est quelconque dans $\mathcal{D}$ (non sur la falaise).

Nous pouvons alors écrire :

$$f_{1,2n+1}(z) = \frac{(2n)!}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\tau}}{(\tau + iz)^{2n+1}} d\tau + ie^{-iz} \quad (\tau \text{ réel}).$$

Un calcul facile, suivant la méthode du § 4,532, donne ensuite :

$$(4/60) \quad \varphi_{1,2n+1}(x, y) = e^y \sin x - \frac{(-1)^n (2n)!}{\pi} e^y \int_y^{+\infty} e^{-u} \cdot \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{r^{2n+1}} \right]_{x=y+u} du$$

(avec $n \geq 0, \quad x \neq 0$).

Deuxième cas : z est situé sur la falaise ($x = 0$).

Alors, $-iz = y$; nous réduirons alors $\Gamma'_{\bar{j}}$ aux portions $(-\infty, y - \varepsilon)$ et $(y + \varepsilon, 0)$ de l'axe réel et au demi-cercle de centre y et de rayon ε situé dans le demi-plan $\Im \tau > 0$ (fig. 18). Si ε tend vers zéro, une méthode classique donne :

$$\int_{\Gamma'_{\bar{j}}} \frac{e^{\tau} d\tau}{(\tau - y)^{2n+1}} = \mathfrak{P} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\tau}}{(\tau - y)^{2n+1}} d\tau - i\pi \frac{e^{iz}}{(2n)!},$$

où le symbole $\mathfrak{P}$ devant l'intégrale du second membre signifie que cette intégrale doit être entendue au sens d'une « valeur principale » de CAUCHY, soit :

$$\mathfrak{P} \int_{-\infty}^0 = \lim_{\varepsilon > 0} \left(\int_{-\infty}^{y-\varepsilon} + \int_{y+\varepsilon}^0 \right).$$

En remplaçant dans (4/59) on obtient :

$$f_{1,2n+1}(iy) = \frac{1}{\pi} (2n)! \mathfrak{P} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\tau}}{(\tau - y)^{2n+1}} d\tau.$$

On vérifie que le second membre est réel, en accord avec (4/48). Posant $\tau - y = -u$, on obtient :

$$(4/61) \quad \varphi_{1,2n+1}(0, y) = -\frac{1}{\pi} (2n)! e^y \mathfrak{P} \int_y^{+\infty} \frac{e^{-u} du}{u^{2n+1}},$$

formule qui, ici, se déduit de (4/60) en y faisant $x = 0$ et en prenant l'intégrale en valeur principale.

Cas particulier : $n = 0$.

On obtient :

$$(4/62) \quad \varphi_1(x, y) = \begin{cases} e^y \sin x - \frac{1}{\pi} e^y \int_y^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{u du}{u^2 + x^2} & (x \neq 0), \\ -\frac{1}{\pi} e^y \mathfrak{E} \int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du & (x = 0). \end{cases}$$

2° Parlons maintenant de (4/54), que nous transcrivons en ne conservant que la branche P^- du chemin P , soit :

$$(4/63) \quad f_{1,2n+1}(z) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{P^-} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{2n}}{\zeta + i} d\zeta + ie^{-iz};$$

P^- est donc un chemin du plan ζ assujetti à partir de l'infini dans le demi-plan $\Re(z\zeta) < 0$ (≤ 0 si $n = 0$) et à aboutir à l'origine en tournant autour de $-i$ dans le sens rétrograde (fig. 19).

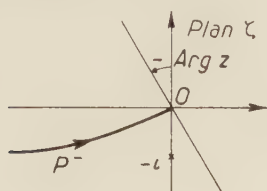


Fig. 19

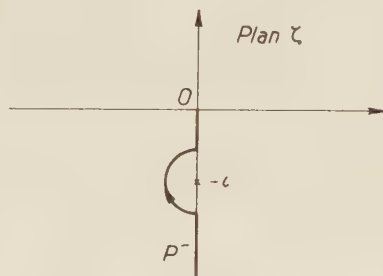


Fig. 20

On pourra donc confondre P^- avec le demi-axe réel négatif, pour tout z de $\mathcal{O}$, si $n = 0$, et pour $n \neq 0$, seulement si z n'appartient pas à la falaise. D'où deux cas :

Premier cas : $n = 0$.

Nous aurons, pour tout z de $\mathcal{O}$:

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{z\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + i} + ie^{-iz};$$

posant $\zeta = -u$ et prenant les parties réelles des deux membres, on trouve :

$$(4/64) \quad \varphi_1(x, y) = e^y \sin x - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u \cos uy + \sin uy}{u^2 + 1} du.$$

En comparant avec (4/62) on trouve une identité intéressante :

$$(4/65) \quad \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u \cos uy + \sin uy}{u^2 + 1} du = \begin{cases} e^y \int_y^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{u du}{u^2 + x^2} & (x \neq 0), \\ e^y \mathfrak{E} \int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du & (x = 0) \end{cases}$$

et, en faisant un calcul analogue avec les parties imaginaires de $f_1(z)$, on obtiendrait l'identité :

$$(4/66) \quad \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{\cos uy - u \sin uy}{u^2 + 1} du = \begin{cases} ey \int_y^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{x du}{u^2 + x^2} & (x \neq 0), \\ \pi ey & (x = 0). \end{cases}$$

Deuxième cas : $n \neq 0$.

z est quelconque dans $\mathcal{O}$ (non sur la falaise).

La méthode du premier cas est encore applicable et conduit à :

$$(4/67) \quad \varphi_{1,2n+1}(x, y) = ey \sin x - \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot u^{2n} \cdot \frac{u \cos uy + \sin uy}{u^2 + 1} du \\ (x \neq 0).$$

z est situé sur la falaise ($x = 0$).

Prenons alors P^- confondu avec le demi-axe imaginaire négatif du plan ζ , sauf au voisinage du point $-i$ qu'il évite suivant un demi-cercle centré en $-i$, à gauche de l'axe imaginaire (fig. 20). Faisant tendre le rayon de ce cercle vers zéro, nous aurons, suivant la méthode déjà employée plus haut :

$$f_{1,2n+1}(z) = -\frac{1}{\pi} \mathfrak{P} \int_0^{+\infty} e^{-izu} \cdot \frac{u^{2n}}{u-1} du \quad (z = iy),$$

d'où l'on déduit :

$$(4/68) \quad \varphi_{1,2n+1}(0, y) = -\frac{1}{\pi} \mathfrak{P} \int_0^{+\infty} e^{uy} \cdot \frac{u^{2n}}{u-1} du.$$

Remarque.

Cette méthode est plus généralement applicable à z quelconque dans $\mathcal{O}$, sauf sur la surface libre ($y \neq 0$). On obtient ainsi :

$$(4/69) \quad \varphi_{1,2n+1}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \mathfrak{P} \int_0^{+\infty} e^{uy} \cdot \frac{u^{2n}}{u-1} \cos ux du \quad (y \neq 0).$$

On notera toutefois que cette formule est encore valable sur la surface libre si $n = 0$.

On écrirait facilement les identités auxquelles donne lieu la comparaison des formules (4/60) avec (4/67) et (4/69), et de (4/61) avec (4/68).

Nous remarquerons, sans insister, que la « méthode directe » du § 3,13 permettant le passage de la formule (4/51) à la formule (4/54) donnerait aussi des démonstrations, indépendantes du problème traité ici, pour les identités telles que (4/65), (4/66) et les analogues.

4,54 Étude de la surface libre.

Nous allons étudier la forme de la surface libre correspondant aux ondes stationnaires associées aux solutions R.B et S, donc, avec les notations du § 4,41, les fonctions $\varphi(x)$ qui correspondent à ces solutions.

4,541 FONCTION $\varphi_0(x)$.

D'après (4/57), nous avons :

$$(4/70) \quad \varphi_0(x) = \cos x.$$

4,542 FONCTION $\varphi_1(x)$.

D'après (4/62) ou (4/64), nous obtenons :

$$(4/71) \quad \varphi_1(x) = \sin x - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{u du}{u^2 + x^2}.$$

Dans cette formule, l'intégrale représente l'influence de la falaise par rapport à l'onde ($\sin x$) qui correspond au cas de l'océan de profondeur illimitée sans obstacle; c'est aussi la différence entre $\varphi_1(x)$ et son comportement asymptotique $\sin x$.

(4/56) ou une étude directe nous donnent le développement en série asymptotique de cette intégrale; on obtient :

$$(4/72) \quad \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{u}{u^2 + x^2} du \approx \frac{1!}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \dots + \frac{(-1)^n (2n+1)!}{x^{2n+2}} + \dots$$

On peut écrire $\varphi_1(x)$ sous une autre forme à l'aide des fonctions :

$$\text{Ci } x = \int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du \quad \text{si } x = \int_\infty^x \frac{\sin u}{u} du;$$

on obtient :

$$(4/73) \quad \varphi_1(x) = \sin x + \frac{1}{\pi} (\cos x \text{ Ci } x + \sin x \text{ si } x).$$

On peut obtenir cette formule à l'aide d'un formulaire de calcul symbolique, car :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{u du}{u^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{t dt}{1 + t^2} = \text{image de } \frac{t}{1 + t^2}$$

dans la transformation de LAPLACE = — ($\cos x \cdot \text{Ci } x + \sin x \cdot \text{si } x$).

On peut aussi remarquer que $f_1(z)$ vérifie (4/47) avec $B_n = \frac{1}{\pi}$ et $n = 0$, équation d'où l'on tire :

$$\frac{d^2 f_1}{dz^2} + f_1 = -\frac{1}{\pi z^2} - \frac{i}{\pi z}.$$

Faisant $z = x$ dans cette relation et prenant les parties réelles des deux membres, on démontre que $\varphi_1(x)$ vérifie l'équation :

$$(4/74) \quad \varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = -\frac{1}{\pi x^2}.$$

Il suffit de résoudre cette équation par la méthode de la variation des constantes et de transformer le résultat pour trouver (4/73).

STOKER indique, dans son mémoire [12], une formule traduisant que $\varphi_1(x, y)$ donné par (4/62) vaut $e^y \cdot \varphi_1(x)$, $\varphi_1(x)$ étant donné par (4/73); une telle relation est erronée.

4,543 FONCTION $\varphi_{1,2n+1}(x)$.

On peut utiliser (4/67), mais il est plus simple de partir de (4/53) qui donne :

$$(4/75) \quad \varphi_{1,2n+1}(x) = \varphi_1(x) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{x^{2n}} \right],$$

expression sur laquelle on vérifie, d'après (4/72), le théorème du § 4,333.

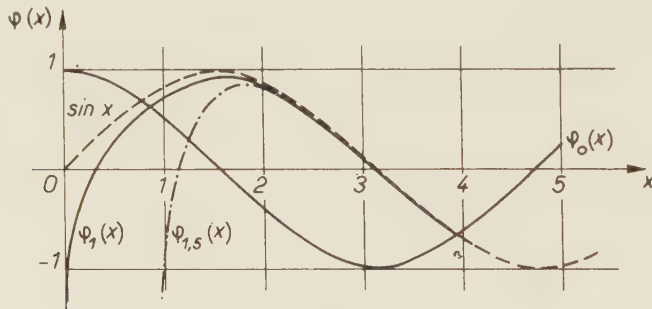


Fig. 21

Si l'on veut conserver l'onde voisine de la falaise qui intervient pour $\varphi_1(x)$, on prendra n pair.

On peut montrer que $\varphi_{1,2n+1}(x)$ vérifie l'équation analogue à (4/74) :

$$(4/76) \quad \varphi''_1(x) + \varphi(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+2}}.$$

4,544 GRAPHIQUES.

On trouvera ci-après (fig. 21) les graphiques des fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_{1,5}(x)$.

On remarque que, par rapport à l'amplitude de l'onde à l'infini, la hauteur de la crête la plus voisine de la falaise est :

0,94 pour $\varphi_1(x)$ (donc inférieure de 6 %);

0,85 pour $\varphi_{1,5}(x)$ (donc inférieure de 15 %).

En outre, $\varphi_{1,5}(x)$ se rapproche plus vite que $\varphi_1(x)$ de leur comportement asymptotique commun $\sin x$.

4,55 Détermination directe de $\varphi(x, y)$ ⁽¹⁾.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de déterminer $\varphi(x, y)$ sans passer par le potentiel complexe $f(z)$. Cette méthode est celle qui devrait être suivie dans l'étude des mouvements 3 DR; la discussion faite dans ce qui suit permet de mieux comprendre les difficultés qui s'attachent à la résolution du cas 3 DR.

4,551 ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

Dans le cas 2 D, d'après les §§ 1,7 et 2,2, l'énoncé est le suivant :

« Trouver une fonction $\varphi(x, y)$ harmonique, régulière dans le quadrant $\mathcal{D}(x \geq 0, y \leq 0)$, sans autre singularité à distance finie que l'origine, telle que :

$$(4/77) \quad \varphi_y - \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad Ox;$$

$$(4/78) \quad \varphi_x = 0 \quad \text{sur} \quad Oy'.$$

4,552 TRANSFORMATION DU PROBLÈME.

Nous nous contenterons d'appliquer les résultats du chapitre II, bien qu'il soit facile ici de procéder directement.

Si nous prolongeons $\varphi(x, y)$ à travers Oy' de telle sorte que la fonction prolongée prenne les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à Oy' , la fonction (cf. § 2,14) :

$$(4/79) \quad \chi(x, y) = \varphi_y - \varphi$$

sera harmonique, régulière dans le demi-plan $y \leq 0$, sauf en O, nulle sur Ox et Ox' , ses valeurs étant les mêmes en des points symétriques par rapport à Oy' .

Ceci permet (cf. § 2,22) d'expliciter $\chi(x, y)$, soit :

$$(4/80) \quad \chi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{B_n}{r^{2n+1}} \sin(2n+1)\theta,$$

la série étant absolument et uniformément convergente dans tout le plan, sauf à l'origine. Procédant comme au § 2,3, on se borne à prendre, d'après le principe de superposition des solutions dans les problèmes linéaires :

$$\chi(x, y) = \frac{B_n}{r^{2n+1}} \sin(2n+1)\theta \quad (n \text{ entier} \geq 0 \text{ ou } n = 0).$$

(1) Cf. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, tome 239, 1954, pp. 860-862.

Remarquant enfin que (4/77) est vérifiée d'elle-même, nous obtenons l'énoncé transformé du problème :

« Trouver une fonction $\varphi(x, y)$ harmonique, régulière dans le quadrant $\mathcal{O}(x \geq 0, y \leq 0)$, sans autre singularité à distance finie que l'origine, telle que :

$$(4/81) \quad \varphi_y - \varphi = \frac{B_n}{r^{2n+1}} \sin(2n+1)\theta;$$

$$(4/78) \quad \varphi_x = 0 \quad \text{sur} \quad Oy'.$$

On vérifie aisément que cet énoncé est bien en accord avec celui du § 4,50.

4,553 RÉSOLUTION DU PROBLÈME.

Nous ne donnerons que les grandes lignes des raisonnements.

Continuons provisoirement à appeler $\chi(x, y)$ le second membre de (4/81); la méthode de variation des constantes donne l'intégrale générale de (4/81) sous la forme :

$$(4/82) \quad \varphi(x, y) = \lambda(x) \cdot e^y - e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \chi(x, t) dt,$$

$\lambda(x)$ étant une fonction de x pour l'instant arbitraire.

Une vérification très simple nous montre que :

« Si $\chi(x, y)$ est une fonction harmonique, il en est de même de :

$$\widehat{\chi}(x, y) = e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \cdot \chi(x, t) dt. »$$

Ce résultat, appliqué à (4/82), montre que $\varphi(x, y)$ sera harmonique, pourvu que ce soit le cas de $\lambda(x) \cdot e^y$, d'où :

$$(4/83) \quad \frac{d^2 \lambda}{dx^2} + \lambda = 0.$$

Il nous reste à traduire (4/78). Nous avons :

$$(4/84) \quad \varphi_x = \lambda'(x) e^y - e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \chi_x(x, t) dt.$$

Le comportement de l'intégrale, lorsque x tend vers zéro, n'est pas évident, car $\chi_x(x, t)$ peut ne pas être définie pour $x = t = 0$. Nous distinguerons donc deux cas :

Premier cas : $n < 0$, soit $n = -m$.

Alors :

$$\chi(x, y) = -B_n r^{2m-1} \sin(2m-1)\theta,$$

d'où :

$$\chi_x(x, y) = -(2m-1) B_n r^{2m-2} \sin(2m-2)\theta,$$

polynôme en x, y , nul pour $x = 0$ quel que soit y . Donc, dans (4/84) l'intégrale sera une somme de termes de la forme :

$$x^h \int_y^{+\infty} e^{-t} \cdot t^k dt,$$

donc qui tendent vers zéro avec x .

Dès lors, (4/78) sera vérifiée si $\lambda'(0) = 0$, ce qui, joint à (4/83), nous donne $\lambda(x) = A \cdot \cos x$, A étant une constante. En reportant dans (4/82), nous mettons en évidence les solutions :

$$(4/85) \quad \varphi_0(x, y) = e^y \cos x;$$

$$(4/86) \quad \varphi_{1, -(2m-1)}(x, y) = B_n e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} [r^{2m-1} \sin(2m-1)\theta]_{y=t} dt,$$

en accord avec (4/57) et (4/58) si l'on prend :

$$B_n = \frac{(-1)^m}{(2m-1)!}.$$

Deuxième cas : $n \geq 0$.

Ici :

$$\chi(x, y) = \frac{B_n}{r^{2n+1}} \sin(2n+1)\theta,$$

d'où :

$$\chi_x(x, y) = -\frac{(2n+1) B_n}{r^{2n+2}} \sin(2n+2)\theta.$$

Dans (4/84) l'intégrale tend vers zéro avec x pour les intervalles d'intégration $(y, -\varepsilon), (+\varepsilon, +\infty)$, ε étant une quantité positive que l'on peut supposer très petite. Il reste donc :

$$\lambda'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-t} \chi_x(x, t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} B_n \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-t} \left[\frac{\cos(2n+1)\theta}{r^{2n+1}} \right]_{y=t} dt,$$

comme on le voit aisément. On réduit cette expression par des intégrations par parties basées sur la formule :

$$\frac{\cos (2 n+1) \theta}{r^{2 n+1}}=-\frac{1}{2 n(2 n-1)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\cos (2 n-1) \theta}{r^{2 n-1}}\right],$$

et l'on obtient :

$$\lambda'(0)=(-1)^n \cdot \frac{B_n}{(2 n) !} \lim _{x \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-t} \cdot \frac{x}{x^2+t^2} d t ;$$

cette dernière limite se calcule aisément en remplaçant e^{-t} par 1; elle vaut π .

Ainsi :

$$\lambda'(0)=(-1)^n \cdot \frac{B_n \pi}{(2 n) !}=1$$

si l'on adopte :

$$B_n=\frac{(-1)^n}{\pi}(2 n) !,$$

et par suite :

$$\lambda(x)=A \cos x+\sin x ;$$

(4/82) fournit alors la solution (4/85), et en outre la solution :

$$(4/87) \quad \varphi_{1,2 n+1}(x, y)=e^y \sin x-\frac{(-1)^n(2 n) !}{\pi} e^y \int_y^{+\infty} e^{-t} \cdot\left[\frac{\sin (2 n+1) \theta}{r^{2 n+1}}\right]_{x=y=t} d t,$$

qui coïncide avec (4/60) et suppose comme elle $x \neq 0$.

4,554 CONCLUSION.

Cette méthode de résolution, qui est seule possible dans le cas 3 DR, offre des inconvénients évidents, dont le plus grave est de ne pas permettre de résoudre par une méthode générale les difficultés présentées dans certains cas par les formules. Ainsi, sur la falaise, (4/87) n'est plus valable et doit être remplacée par (4/61), ce qui n'est plus évident comme dans la première méthode.

On peut ainsi mieux juger des difficultés que présente la généralisation de cette étude au cas 3 DR. L'énoncé du problème est alors (cf. §§ 2,3 et 4,552) :

« Trouver une fonction $\varphi(x, y)$, régulière dans le quadrant $\mathcal{O}(x \geq 0, y \leq 0)$, sans autre singularité à distance finie que l'origine, telle que :

$$(4/88) \quad \Delta \varphi-k^2 \varphi=0 ;$$

$$(4/89) \quad \begin{array}{ll} \varphi_y-\varphi=A_n I_{2 n+1}(k r) \sin (2 n+1) \theta & \\ \text { ou } & B_n K_{2 n+1}(k r) \sin (2 n+1) \theta \end{array} \quad \text { dans } \quad \mathcal{O} ;$$

$$(4/90) \quad \varphi_x=0 \quad \text { sur } \quad O y' . »$$

La difficulté essentielle tient, non pas au remplacement de l'équation de LAPLACE par (4/88), mais à la nécessité de manipuler les fonctions de BESSEL modifiées I et K. Nous laisserons de côté cette étude.

4,6

ÉTUDE PARTICULIÈRE DE L'ONDE LIQUIDE BORNÉE SUR LA RIVE

Nous allons étudier avec quelque détail les fonctions :

$$(4/7) \quad f_0(z) = \sum_{j=1}^q a_j \cdot e^{\rho_j z}, \quad \varphi_0(x) = \mathcal{R} f_0(x),$$

qui conduisent à l'onde liquide bornée sur la rive (§ 4,42). Nous nous plaçons dans le cas général, laissant de côté le cas de la falaise verticale, où l'étude de ces fonctions est triviale.

L'expression (2/34) des a_j et l'expression (2/20) des ρ_j rendent le calcul direct de $f_0(z)$ pénible, en l'absence de tables convenables de l'exponentielle complexe; d'autre part, expliciter $\varphi_0(x)$ à partir de (4/7) conduit à une formule compliquée, sans grand intérêt.

La méthode de calcul que nous proposons repose essentiellement sur les développements en séries de puissances de $f_0(z)$ et de $\varphi_0(x)$, ces développements étant basés sur les valeurs des sommes S_h explicitées au § 2,6. Notre méthode vaut quel que soit q ; on trouvera dans FRIEDRICHS [1] d'autres expressions approchées valables quand q est assez grand.

4,61 Développements de $f_0(z)$ et $\varphi_0(x)$ en séries de puissances.

Partant de :

$$e^{\rho_j z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho_j z)^n}{n!}$$

on trouve, d'après : $\sum_{j=1}^q a_j \rho_j^n = S_{n+q-1}$:

$$(4/91) \quad f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} S_{n+q-1},$$

série convergente dans tout le plan z . Compte tenu de la périodicité des S_h et des valeurs nulles (§§ 2,61 et 2,62), on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_0(z) = & 1 + \frac{z}{1!} S_q + \frac{z^2}{2!} S_{q+1} + \dots + \frac{z^q}{q!} S_{2q-1} \\ & + (-1)^q \left[\frac{z^{2q}}{(2q)!} + \frac{z^{2q+1}}{(2q+1)!} S_q + \dots + \frac{z^{3q}}{(3q)!} S_{2q-1} \right] \\ & + \left[\frac{z^{4q}}{(4q)!} + \frac{z^{4q+1}}{(4q+1)!} S_q + \dots + \frac{z^{5q}}{(5q)!} S_{2q-1} \right] + \dots \end{aligned}$$

Faisons $z = x$; d'après (2/43) on a :

$$\mathcal{R} S_{q+l} = (-1)^{l+1} b_{l+1} \quad (l = 0, 1, \dots, q-2), \quad \mathcal{R} S_{2q-1} = 0;$$

il en résulte :

$$\begin{aligned} (4/92) \quad \varphi_0(x) &= 1 - b_1 \frac{x}{1!} + b_2 \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^{q-1} \cdot b_{q-1} \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} + (-1)^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} \\ &\times \left[1 - b_1 \frac{x}{2q+1} + b_2 \frac{x^2}{(2q+1)(2q+2)} - \dots + (-1)^{q-1} \cdot b_{q-1} \frac{x^{q-1}}{(2q+1)(2q+2) \dots (3q-1)} \right] \\ &+ \frac{x^{4q}}{(4q)!} \left[1 - b_1 \frac{x}{4q+1} + b_2 \frac{x^2}{(4q+1)(4q+2)} \right. \\ &\quad \left. - \dots + (-1)^{q-1} \cdot b_{q-1} \frac{x^{q-1}}{(4q+1) \dots (5q-1)} \right] + \dots, \end{aligned}$$

développement convergent pour tout x , et dont il est fondamental de remarquer que les coefficients de $x^q, \dots, x^{2q-1}, x^{3q}, \dots, x^{4q-1}$, et ainsi de suite, de $2q$ en $2q$, sont nuls.

4,62 Expressions approchées de $\varphi_0(x)$.

4,621 APPROXIMATION PAR UN POLYNOME.

D'après (4/92), il est naturel de chercher avec quelle approximation l'expression :

$$(4/93) \quad \tilde{\varphi}_0(x) = 1 - b_1 \cdot \frac{x}{1!} + b_2 \cdot \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^{q-1} \cdot b_{q-1} \cdot \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}$$

représente $\varphi_0(x)$.

Pour évaluer l'erreur $\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)$, nous ne pouvons nous servir du critère des séries alternées, car la valeur absolue des termes de (4/92) n'est pas régulièrement décroissante. Procédons directement en remarquant que $b_j < \frac{1}{j! \alpha^j} \left(\alpha = \frac{\pi}{2q} \right)$ pour $j = 1, \dots, q-1$ (on ne tient pas compte de $b_{q-j} = b_{j-1}$); par suite :

$$\begin{aligned} &\left| 1 - b_1 \frac{x}{2q+1} + b_2 \frac{x^2}{(2q+1)(2q+2)} - \dots + (-1)^{q-1} \cdot b_{q-1} \frac{x^{q-1}}{(2q+1)(2q+2) \dots (3q-1)} \right| \\ &< 1 + \frac{x}{2q \alpha} + \dots + \frac{x^{q-1}}{(q-1)! (2q \alpha)^{q-1}} = 1 + \frac{x}{\pi} + \dots + \frac{x^{q-1}}{(q-1)! \pi^{q-1}} < e^{\frac{x}{\pi}} \end{aligned}$$

et de même, les modules des crochets suivants dans (4/92) seront inférieurs à $\exp\left(\frac{x}{2\pi}\right), \exp\left(\frac{x}{3\pi}\right) \dots$. D'où résulte :

$$|\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{2hq}}{(2hq)!} e^{\frac{x}{h\pi}},$$

la série du second membre étant convergente pour tout x . On borne simplement la somme de cette série, en remarquant que le rapport de deux termes consécutifs est inférieur à $\frac{x^{2q}}{(2hq)^{2q}}$, donc à $\left(\frac{x}{2q}\right)^{2q}$ pour tout h . Supposant $x < 2q$, on trouve :

$$(4/94) \quad |\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| < \frac{x^{2q} e^{\frac{x}{2q}}}{(2q)!} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2q}\right)^{2q}}.$$

Il convient d'ailleurs de remarquer que cette borne supérieure de l'erreur est assez grossière. On est assuré, toutefois, d'obtenir une bonne approximation de $\varphi_0(x)$ par $\tilde{\varphi}_0(x)$ en se limitant à $x = \frac{2q}{3}$, car, la formule de STIRLING appliquée à $(2q)!$ donne, comme équivalent du deuxième membre de (4/94), l'expression :

$$\left(\frac{1}{3} e^{1 + \frac{1}{3\pi}}\right)^{2q} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi q}}$$

qui tend vers zéro quand q tend vers l'infini. Donc, pour $x = \frac{2q}{3}$ et q assez grand, le second membre de (4/94) sera très petit.

Remarquons enfin que, lorsque x augmente, le second membre de (4/94) augmente; il suffit donc de le calculer pour la plus grande valeur de x envisagée.

4,622 APPROXIMATION PAR LA THÉORIE DE L'EAU PEU PROFONDE.

On trouvera l'exposé de cette théorie chez STOKER [12]; nous en retiendrons seulement qu'elle fournit comme représentation approchée de $\varphi_0(x)$, prenant même valeur que $\varphi_0(x)$ pour $x = 0$, l'expression :

$$(4/95) \quad \tilde{\tilde{\varphi}}_0(x) = J_0\left(2\sqrt{\frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}}\right).$$

Grâce à (4/92), on peut très facilement comparer cette fonction à $\varphi_0(x)$. Son développement en série de puissances est, en effet :

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{(2!)^2} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \dots + \frac{(-1)^{q-1} x^{q-1}}{[(q-1)!]^2 \operatorname{tg}^{q-1} \alpha} + \frac{(-1)^q}{(q!)^2} \cdot \frac{x^q}{\operatorname{tg}^q \alpha} + \dots;$$

série convergente quel que soit x . Or, dans (4/92), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{1!} &= \frac{1}{(1!)^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \\ \frac{b_2}{2!} &= \frac{1}{2!} \cotg \alpha \cotg 2\alpha = \frac{1}{(2!)^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}\right), \\ &\dots, \\ \frac{b_{q-1}}{(q-1)!} &= \frac{1}{(q-1)!} \cotg \alpha \cotg 2\alpha \dots \cotg (q-1)\alpha \\ &= \frac{1}{[(q-1)!]^2 \operatorname{tg}^{q-1} \alpha} \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}\right) \dots \left(\frac{(q-1) \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (q-1)\alpha}\right). \end{aligned}$$

Donc, lorsque $\alpha \rightarrow 0$ (c'est-à-dire $q \rightarrow \infty$), les coefficients des puissances de x dans (4/92) et (4/95) sont de même signe et équivalents, jusqu'aux coefficients de x^{q-1} inclus; au delà, les coefficients de $x^q, x^{q+1}, \dots, x^{2q-1}$ sont nuls dans $\varphi_0(x)$ mais ne le sont pas dans $\tilde{\varphi}_0(x)$.

Quoique cette correspondance entre les deux séries soit assez compliquée, elle laisse supposer que l'approximation (4/95) n'est pas très bonne, sauf si α est petit mais à condition que x ne soit pas trop grand.

4,623 APPROXIMATION PAR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE.

Les deux approximations précédentes concernent le voisinage de $x = 0$. Au voisinage de $x = \infty$, il est naturel de chercher à représenter $\varphi_0(x)$, d'après (4/41), par :

$$(4/96) \quad [\varphi_0(x)]_\infty = \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \left[x + (q-1) \frac{\pi}{4} \right].$$

Nous avons immédiatement, compte tenu de (2/34) :

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x) - [\varphi_0(x)]_\infty| &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left| \mathcal{R} \sum_{j=1}^{q-1} b_{j-1} e^{\rho_j x + i(q-2j+1)\frac{\pi}{4}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=1}^{q-1} b_{j-1} e^{x \mathcal{R} \rho_j} \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=1}^{q-1} b_{j-1} e^{-x \sin j \frac{\pi}{q}}. \end{aligned}$$

Le plus simple, semble-t-il, est d'étudier numériquement cette dernière expression pour différentes valeurs de x , jusqu'à ce qu'on en trouve une qui corresponde à l'approximation désirée, puisque la borne obtenue décroît quand x augmente. Nous préciserons ce point sur les exemples qui suivent.

4,63 Exemples numériques.

4,631 PLAGE INCLINÉE A 45° ($q = 2$).

On trouve :

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\frac{\pi}{4}-z} + e^{-i\frac{\pi}{4}-iz} \right), \quad \varphi_0(x) = \frac{1}{2} (e^{-x} + \cos x - \sin x),$$

$$\tilde{\varphi}_0(x) = 1 - x, \quad \tilde{\varphi}_0(x) = J_0(2\sqrt{x}), \quad [\varphi_0(x)]_\infty = \frac{1}{2} (\cos x - \sin x).$$

On a :

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| &< 5 \cdot 10^{-3} && \text{pour } x < 0,6; \\ |\varphi_0(x) - [\varphi_0(x)]_\infty| &< 1 \cdot 10^{-3} && \text{pour } x > 4. \end{aligned}$$

La différence entre $\tilde{\varphi}_0(x)$ et $\varphi_0(x)$ présente une allure plus compliquée selon les valeurs de x ; toutefois, au voisinage de l'origine, cette différence prend des valeurs $> 0,04$ dès que $x > 0,4$.

On trouvera le graphique de $\varphi_0(x)$ pour ce cas chez STOKER ([12], § 6) (au facteur $\pi\sqrt{2}$ près). Il serait facile de tracer celui des autres fonctions considérées ici.

4,632 PLAGE INCLINÉE A 30° ($q = 3$).

Le calcul donne ici :

$$f_0(z) = \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}-i}{2}z} + e^{-\frac{\sqrt{3}+i}{2}z} - \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-iz},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-x\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin x,$$

$$\tilde{\varphi}_0(x) = 1 - x\sqrt{3} + \frac{x^2}{2}, \quad \tilde{\tilde{\varphi}}_0(x) = J_0\left(2\sqrt{x\sqrt{3}}\right), \quad [\varphi_0(x)]_\infty = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x.$$

(4/94) donne :

$$|\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| < 4 \cdot 10^{-3} \quad \text{pour} \quad x < 1$$

et :

$$< 0,2 \quad \text{pour} \quad x < 2.$$

Une étude directe de $|\varphi_0(x) - [\varphi_0(x)]_\infty|$ est ici possible; on trouve que cette quantité est :

$$< 1 \cdot 10^{-3} \quad \text{pour} \quad x > 7,1$$

et :

$$< 0,04 \quad \text{pour} \quad x > 1,8.$$

Les graphiques ci-après (*fig. 22*) montrent le comportement de $\varphi_0(x)$ et de ses diverses approximations.

4,633 PLAGE INCLINÉE A 6° ($q = 15$).

C'est le cas envisagé par STOKER et qu'il étudie avec beaucoup de détails. Nous ne ferons ici que quelques remarques.

Il n'y a pas intérêt ici à expliciter $\varphi_0(x)$ comme dans les deux cas précédents.

Le polynôme $\tilde{\varphi}_0(x)$ est du quatorzième degré. Appliquons (4/94); on trouve que, pour $x \leq 7$, c'est-à-dire pour l'ensemble des valeurs de x qui correspondent aux calculs de STOKER, on a :

$$|\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| \leq 8 \cdot 10^{-7}$$

et, par suite, notre méthode est extrêmement précise dans cet intervalle. Pour $x \leq 10$, la même formule donne $|\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| \leq 0,09$ mais cette borne est certainement trop grande.

Si dans (4/92) on arrêta la série au terme en x^{3q-1} , au lieu de l'arrêter à x^{q-1} , on trouverait, en reprenant le calcul du § 4,621, que, pour $x \leq 15$, l'erreur serait inférieure à $5 \cdot 10^{-11}$.

Si l'on cherche à représenter $\varphi_0(x)$ par son comportement asymptotique, on trouve que la borne supérieure de l'erreur donnée au § 4,623 vaut 0,16 pour $x = 15$;

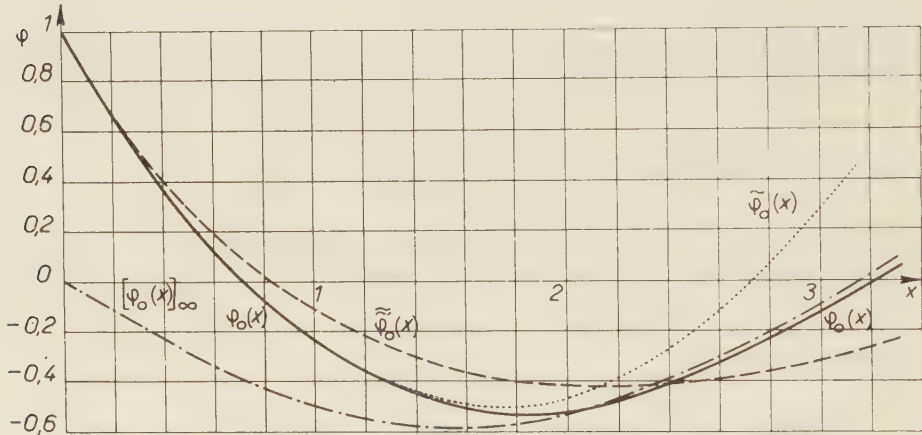


Fig. 22

toutefois, la majeure partie de l'erreur est due au terme $\mathcal{R} a_{q-1} e^{\rho_{q-1}x}$; si donc on représente $\varphi_0(x)$ par :

$$\frac{1}{\sqrt{15}} \sin x + \mathcal{R} a_{14} e^{\rho_{14}x},$$

l'erreur tombe à 0,05 au plus.

Remarquons que le graphique de $\varphi_0(x)$ donné par STOKER est erroné : les valeurs doivent être changées de signe, et il manque l'onde la plus proche du rivage; cette onde est rétablie chez FRIEDRICHS [1], mais les signes sont inchangés.

4,7

ÉTUDE PARTICULIÈRE DE L'ONDE LIQUIDE LOGARITHMIQUEMENT INFINIE SUR LA RIVE

L'étude des solutions S et des ondes liquides associées se déduit de la formule (4/19) ou du résultat du § 4,333 qui est une interprétation de cette formule; nous sommes ainsi ramenés à étudier $f_1(z)$, et plus particulièrement $\varphi_1(x)$ pour le profil de l'onde associée. L'étude est beaucoup plus difficile que pour $\varphi_0(x)$ et les résultats que nous indiquons sont fragmentaires.

4,71 Expression explicite de $\varphi_1(x)$.

Nous utiliserons (4/23), mais on peut se servir aussi de (4/21) qui conduit au même résultat. Ramenons les deux branches de P sur le demi-axe réel négatif; il n'y a de difficulté que si q est pair, car dans ce cas, $\rho_{\frac{q}{2}} = -1$ se trouve sur cet axe; nous opérerons comme au § 4,533 (1^o, deuxième cas), en ramenant les deux branches de P sur le demi-axe réel négatif, sauf au voisinage de -1 qu'elles évitent par deux demi-cercles centrés en ce point et situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe réel. Compte tenu de (2/24) un calcul élémentaire de résidus donne alors :

$$(4/97) \quad f_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{q-1}}{R(\zeta)} d\zeta - i \sum_1 a_j e^{\rho_j z} + i \sum_2 a_j e^{\rho_j z},$$

avec :

q pair, intégrale en valeur principale de CAUCHY, les sommations s'étendant, pour Σ_1 , de $j = 1$ à $j = \frac{q}{2} - 1$; pour Σ_2 , de $j = \frac{q}{2} + 1$ à $j = q$;

q impair, les sommations s'étendant, pour Σ_1 , de $j = 1$ à $j = \frac{q-1}{2}$, et pour Σ_2 , de $j = \frac{q+1}{2}$ à $j = q$.

Faisant $z = x$ dans cette formule, et prenant la partie réelle des deux membres, on trouve (en posant, $\zeta = -u$ dans l'intégrale) :

$$(4/98) \quad \varphi_1(x) = \mathcal{R} i \left(\sum_2 a_j e^{\rho_j x} - \sum_1 a_j e^{\rho_j x} \right) + \frac{(-1)^q}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u^q du}{(u^2 + 1) P(-u)}.$$

On vérifie que, pour $q = 1$, on retrouve (4/71).

La première partie de l'expression obtenue est une somme de termes sinusoïdaux ou sinusoïdaux amortis analogues à ceux figurant dans $\varphi_0(x)$; l'évaluation de cette somme autrement que par le calcul direct ne semble pas possible ici comme pour $\varphi_0(x)$.

La seconde partie de (4/98) est une intégrale qui, d'après (4/34), où l'on prend deux termes dans Σ_k , vérifie pour $x \rightarrow \infty$ la relation :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u^q du}{(u^2 + 1) P(-u)} = \frac{q!}{x^{q+1}} + \frac{o(1)}{x^{q+2}};$$

ceci laisse prévoir une décroissance assez rapide de ce terme quand $x \rightarrow \infty$; toutefois, la factorielle du numérateur de l'équivalent contrarie un peu cette décroissance. On peut donc se demander si, au lieu de procéder à un calcul direct sur (4/22) comme le fait STOKER, il ne serait pas avantageux d'utiliser (4/98) en profitant de la décroissance de l'intégrale; il se présente, pour q pair, la difficulté que l'intégrale est une valeur principale;

on peut, il est vrai, supprimer le pôle $u = 1$ sous le signe somme en décomposant l'intégrale en la somme d'une intégrale ordinaire et de :

$$e^{-x} \mathcal{Q} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = e^{-x} \cdot \text{Ei } x;$$

toutefois, chaque intégrale partielle ne décroît plus que comme $\frac{1}{x}$. Nous étudierons plus loin, sur des cas numériques, quelques aspects de cette question.

4,72 Équation différentielle vérifiée par $\varphi_1(x)$.

L'équation (4/1) relative à $f_1(z)$ s'écrit :

$$\prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) f(z) = if + (1 + ib_1)f' + (b_1 + ib_2)f'' + \dots + b_{q-1}f^{(q)} = \frac{(-1)^{q-1} \cdot (q-1)!}{\pi z^q}.$$

Prenons successivement les dérivées 1^{ère}, 2^{ème}, ..., $q^{\text{ème}}$ de cette équation, et, par multiplication de ces relations par des facteurs numériques convenables, éliminons entre elles f' , f'' , ..., $f^{(2q-1)}$. En se basant sur les relations entre les b_j démontrées au § 2,63, on montrera facilement que $f_1(z)$ vérifie aussi l'équation :

$$f^{(2q)}(z) + (-1)^{q-1} f(z) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(q-1)! i}{z^q} + \frac{q! (1 + ib_1)}{z^{q+1}} + \frac{(q+1)! (b_1 + ib_2)}{z^{q+2}} + \dots + \frac{(2q-1)!}{z^{2q}} \right]$$

ce qui, en faisant $z = x$ et prenant les parties réelles des deux membres, conduit à :

$$(4/99) \quad \varphi_1^{(2q)}(x) + (-1)^{q-1} \varphi_1(x) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{q!}{x^{q+1}} + b_1 \frac{(q+1)!}{x^{q+2}} + \dots + \frac{(2q-1)!}{x^{2q}} \right]$$

d'où, en particulier, (4/74).

Cette relation ne semble pas, cependant, utilisable pour le calcul de $\varphi_1(x)$, la difficulté étant d'extraire celle des intégrales de (4/99) qui représente $\varphi_1(x)$.

Remarque.

L'équation homogène (4/99), soit :

$$\varphi^{(2q)}(x) + (-1)^{q-1} \varphi(x) = 0,$$

est vérifiée par $\varphi_0(x)$, et l'on sait reconnaître $\varphi_0(x)$ parmi ses intégrales, grâce à (4/92) qui donne :

$$\varphi_0^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^k b_k & (k = 0, 1, 2, \dots, q-1), \\ 0 & (k = q, q+1, \dots, 2q-1). \end{cases}$$

On peut d'ailleurs vérifier cette équation à partir de (4/92).

4,73 Développement en série asymptotique.

On utilise (4/39) en prenant les parties réelles des deux membres; compte tenu de ce que, dans (4/98), les exponentielles, sauf celle qui correspond à $j = q$, disparaissent dans le développement asymptotique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (4/100) \quad \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u^q du}{(u^2 + 1)P(-u)} &\approx \frac{q!}{x^{q+1}} + \frac{(q+1)! b_1}{x^{q+2}} \\
 &+ \dots + \frac{(q+s)! b_s}{x^{q+s+1}} + \dots + \frac{(2q-1)!}{x^{2q}} b_{q-1} \\
 &+ (-1)^q \cdot \frac{(3q)!}{x^{3q+1}} + (-1)^q \frac{(3q+1)!}{x^{3q+2}} b_1 \\
 &+ \dots + (-1)^q \cdot \frac{(4q-1)!}{x^{4q}} b_{q-1} + \frac{(5q)!}{x^{5q+1}} + \dots,
 \end{aligned}$$

formule qui contient (4/72).

Une étude plus précise, et notamment l'évaluation d'une borne supérieure de R_k défini par (4/35) pour $n = 0$, montre que l'emploi de cette série asymptotique pour le calcul de l'intégrale ne se révèle être d'une précision intéressante que lorsque l'intégrale est elle-même petite, circonstance que l'on peut très facilement vérifier sur (4/72). Par conséquent, il est sans intérêt de recourir à (4/100) pour le calcul de l'intégrale.

4,74 Exemples numériques.

4,741 PLAGE INCLINÉE A 45° ($q = 2$).

On trouve, d'après (4/98) :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \frac{1}{\pi} \mathfrak{P} \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{u^2}{(u-1)(u^2+1)} du.$$

Comme on l'a signalé au § 4,71, on peut, par décomposition de la fraction rationnelle qui intervient sous le signe somme, concentrer la valeur principale sur $\text{Ei } x$; transformant l'intégrale restante comme au § 4,542, on trouve la formule mentionnée par STOKER :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi} \left[(\cos x - \sin x) \text{Ci } x + (\cos x + \sin x) \left(\frac{\pi}{2} + \text{Si } x \right) + e^{-x} \text{Ei } x \right],$$

dans laquelle :

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{2} + \text{si } x.$$

4,742 PLAGE INCLINÉE A 30° ($q = 3$).

Le calcul donne :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-x\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u^3 du}{(u^2 + 1)(u^2 - u\sqrt{3} + 1)}.$$

On trouve aisément une borne supérieure de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u^3 du}{(u^2 + 1)(u^2 - u\sqrt{3} + 1)} = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot u^3 \cdot U du$$

en posant :

$$U = \frac{1}{(u^2 + 1)(u^2 - u\sqrt{3} + 1)}.$$

U présente un maximum unique pour $u \simeq 0,74$: $U \simeq 2,43$. U décroît très vite pour $u > 2$. Il en résulte que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot u^3 U du < 2,43 \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot u^3 du < \frac{15}{x^4}.$$

On trouve alors que :

$$\left| \varphi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x \right| < 0,05 \quad \text{pour} \quad x > 4.$$

Le calcul numérique de cette intégrale peut être effectué par la méthode classique qui utilise les polynômes de LAGUERRE (1), en l'écrivant :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{t^3 dt}{(t^2 + x^2)(t^2 - tx\sqrt{3} + x^2)}.$$

De cette manière, le calcul de $\varphi_1(x)$ semble relativement facile.

4,743 PLAGE INCLINÉE A 6° ($q = 15$).

Bornons-nous à considérer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot \frac{u^{15} du}{(u^2 + 1)P(-u)} = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot u^{15} \cdot U du$$

de la formule (4/98), en posant encore :

$$U^{-1} = (u^2 + 1)P(-u).$$

(1) Cf. MINEUR, *Techniques de Calcul Numérique* (Paris, 1952), p. 315.

En remarquant que :

$$P(-u) \equiv \prod_{j=1}^{q-1} (u + \rho_j),$$

on a, pour u réel :

$$P(-u) = \prod_{j=1}^{\frac{1}{2}(q-1)} |u + \rho_j|^2 = \prod_{j=1}^{\frac{1}{2}(q-1)} (1 + u^2 - 2u \sin 2j\alpha),$$

d'où :

$$U^{-1} = \prod_{j=0}^7 (1 + u^2 - 2u \sin j \cdot 12^\circ),$$

ce qui permet de calculer facilement les valeurs de U .

On trouve que U présente, pour $u > 0$, un maximum très accentué ($U \simeq 2\,550$) pour $u \simeq 0,96$, et décroît rapidement pour $u > 1$; pour $u = 2$, $U \simeq 0,0014$. Ceci permet de borner l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot u^{15} \cdot U \, du < 2\,550 \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cdot u^{15} \, du = \frac{2\,550 \cdot 15!}{x^{16}},$$

d'où l'on déduit que :

$$\int_0^{+\infty} < 5 \cdot 10^{-4} \quad \text{pour} \quad x = 15.$$

En écrivant cette intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{t^{15} \, dt}{(t^2 + x^2) \cdot x^{14} \, P\left(-\frac{t}{x}\right)},$$

on pourra la calculer à l'aide des polynômes de LAGUERRE; dès que x dépasse 5, la fonction intégrée ne prend plus de grandes valeurs, si bien que le résultat de calcul ne risque d'être affecté dans sa précision par les grandes valeurs de l'intégrand que pour x voisin de zéro.

Quoiqu'on ne puisse dire que l'emploi de (4/98) conduise à des calculs simples, il semble que la méthode sommairement indiquée dans ce qui précède conduise plus facilement aux résultats numériques que le recours à la formule (4/22), en l'absence de tables des intégrales complexes correspondantes.

ÉTUDE DU CAS $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$ ⁽¹⁾

(p, q entiers; p impair, premier avec q , inférieur à $2q$)

5,0

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous étudierons de façon approfondie le cas où l'angle de plage est $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$; p et q sont entiers, p « admissible », selon l'expression introduite au § 2,13. L'énoncé du problème donné au § 2,3 est ici :

« Trouver une fonction $f(z)$, analytique dans le domaine $\mathcal{O}$, sans autre singularité à distance finie que l'origine, telle que :

$$(5/1) \quad \prod_{j=1}^q \left(\frac{d}{dz} - \rho_j \right) f(z) = \frac{B_n}{z^{(2n+1)\frac{q}{p}}}, \quad (n \text{ entier } \geq 0 \text{ ou } n = 0);$$

$$(5/2) \quad \mathcal{J} \left(\frac{df}{dz} + if \right) = 0 \quad (\text{sur } Ox) \quad (z = x \text{ réel});$$

$$(5/3) \quad \mathcal{J} \left(e^{-i\frac{p\pi}{2q}} \cdot \frac{df}{dz} \right) = 0 \quad (\text{sur } Ot) \quad \left(z = re^{-i\frac{p\pi}{2q}}, r \text{ réel} \right).$$

Dans cet énoncé, ρ_j est donné par (2/20) $\rho_j = ie^{ij\frac{p\pi}{q}}$ ($j = 1$ à q). B_n est une constante réelle arbitraire; d'après la détermination de $E(z)$ faite au § 2,21, $z^{(2n+1)\frac{q}{p}}$ est la puissance de z réelle pour z réel, l'argument de z dans $\mathcal{O}$ étant compris entre $-\frac{p\pi}{2q}$ et 0 .

Nous poserons dans la suite $\lambda = (2n+1)\frac{q}{p}$, et nous remarquerons que :

« A tout entier n nous pouvons associer un autre entier m tel que :

$$(5/4) \quad \lambda = (2n+1)\frac{q}{p} = 2m\frac{q}{p} + q.$$

(1) Cf. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, tome 240, 1955, pp. 1310-1312.

On trouve, en effet :

$$(5/5) \quad n = m + P \quad \text{où} \quad P = \frac{1}{2}(p-1),$$

P étant entier puisque p est admissible.

5,1 SOLUTION DU PROBLÈME HOMOGÈNE

Notre définition des a_j , donnée au § 2,5, vaut pour p admissible quelconque. Les calculs faits au § 4,1, pour le cas $p = 1$, sont donc applicables ici, avec une modification évidente pour passer de la condition (4/3) à la condition (5/3). Nous prendrons comme solution du problème homogène (définie seulement à un facteur réel multiplicatif près) la fonction :

$$(5/6) \quad f_0(z) = \sum_{j=1}^q a_j \cdot e^{\rho_j z},$$

formule beaucoup plus simple que celles obtenues par LEWY [5].

5,2 SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME SOLUTIONS FONDAMENTALES

Nous considérons maintenant le cas où l'équation (5/1) est non homogène. Pour l'intégrer, nous utiliserons les résultats du § 3,2.

5,21 Intégrale générale de (5/1).

L'étude est analogue à celle du § 4,21, mais elle est plus compliquée à cause des fonctions multiformes qui interviennent et de la disposition des points ρ_j dans le plan (§ 2,42).

Remarquons tout d'abord que la convention faite au § 3,21, en ce qui concerne les expressions telles que z^λ , sera *sous-entendue dans tout ce qui suit*.

D'après les calculs du § 3,21, l'intégrale générale de (5/1) se met sous la forme provisoire :

$$(5/7) \quad f(z) = \sum_{j=1}^q \left\{ \gamma_j e^{\rho_j z} + \frac{B_n}{\sigma_j} e^{\rho_j z} \int_{\infty}^z \frac{e^{-\rho_j u}}{u^\lambda} du \right\},$$

λ étant ici défini par (5/4).

Pour transformer cette expression comme au § 3,21, nous devrions poser — $\rho_j u = t$, et par suite fixer $\text{Arg}(-\rho_j)$. Mais il est naturel de chercher à faire ce choix (et par suite celui de C_j , comme on l'a expliqué au § 3,21) de telle sorte que les intégrales obtenues dans le plan t vérifient des relations analogues à (4/10) et (4/11), ce qui nous assurera des calculs simples pour la traduction des conditions aux limites (5/2),

(5/3). En opérant ainsi, on est conduit à faire, comme LEWY [5], la distinction entre les deux cas suivants :

— (cas I) : $p \equiv 1 \pmod{4}$;

— (cas II) : $p \equiv 3 \pmod{4}$,

le cas $p = 1$, étudié au chapitre IV, appartenant au cas I. Nous montrerons toutefois au § 5,243, ce que n'a pas fait LEWY dans son mémoire, qu'on peut supprimer une telle distinction par une modification convenable des solutions obtenues.

La suite des calculs montre d'ailleurs qu'il est aussi simple de faire deux changements de variables distincts, savoir :

$$(I) \quad -\rho_j u = t;$$

$$(II) \quad \rho_j u = t,$$

la correspondance u, t étant telle que :

$$(I) \quad \text{Arg } t = \text{Arg } (-\rho_j) + \text{Arg } u;$$

$$(II) \quad \text{Arg } t = \text{Arg } (\rho_j) + \text{Arg } u,$$

soit :

$$(I) \quad t^\lambda = (-\rho_j)^\lambda \cdot u^\lambda;$$

$$(II) \quad t^\lambda = \rho_j^\lambda \cdot u^\lambda.$$

Le choix du chemin d'intégration Γ_j dans le plan t est alors le suivant :

Cas I.

Le chemin d'intégration Γ_j est un chemin composé de deux branches Γ_j^1, Γ_j^2 , sur lesquelles l'argument de t varie continûment. Leur point de départ est le point $-\infty$ sur l'axe réel (avec $\text{Arg } t = -\pi$ sur Γ_j^1 et $\text{Arg } t = +\pi$ sur Γ_j^2), leur point d'arrivée commun est le point $-\rho_j z$, en lequel :

$$(5/8) \quad \text{Arg } (-\rho_j) = -p \frac{\pi}{2} + j \cdot p \frac{\pi}{q}, \quad \text{Arg } (-\rho_j z) = \text{Arg } (-\rho_j) + \text{Arg } z.$$

Pour $p = 1$, on vérifie immédiatement qu'on retrouve le chemin introduit au § 4,21, Γ_j^+ correspondant à Γ_j^1 et Γ_j^- à Γ_j^2 .

Cas II.

Le chemin d'intégration Γ_j est un chemin à une seule branche, sur laquelle l'argument de t varie continûment. Le point de départ est le point $+\infty$ sur l'axe réel (avec $\text{Arg } t = 0$), le point d'arrivée est le point $\rho_j z$, en lequel :

$$(5/9) \quad \text{Arg } (\rho_j) = -p \frac{\pi}{2} + j \cdot p \frac{\pi}{q}, \quad \text{Arg } (\rho_j z) = \text{Arg } (\rho_j) + \text{Arg } z.$$

Par exemple, pour $p = 3$, $q = 2$ (soit $\alpha = \frac{3\pi}{4}$), cas considéré par ISAACSON [3], nous aurons :

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(\rho_1 z) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(\rho_2 z) \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Des exemples de chemins Γ_1 et Γ_2 sont donnés sur la figure 23.

Des définitions (5/8) et (5/9) pour les arguments, il résulte :

$$(5/10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad (-\rho_j)^{\frac{2m^q}{p}} = (-1)^{mq}; \\ \text{(II)} \quad \rho_j^{\frac{2m^q}{p}} = (-1)^{mq}. \end{array} \right.$$

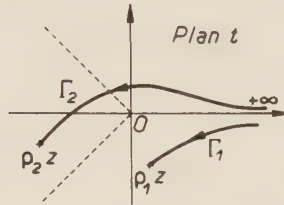


Fig. 23

Le changement de variables est alors facile dans (5/7) et donne :

$$(5/11) \quad f(z) = \sum_{j=1}^q \{ \gamma_j e^{\rho_j z} + B'_n a_j e^{\rho_j z} L_{j,\lambda}(z) \},$$

où :

$$(5/12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad L_{j,\lambda}(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t}{t^\lambda} dt \\ \text{(II)} \quad L_{j,\lambda}(z) = \int_{\Gamma_j} \frac{e^{-t}}{t^\lambda} dt, \end{array} \right.$$

a_j étant toujours donné par (2/23), λ par (5/4); les γ_j sont des constantes arbitraires et B'_n est défini par :

$$(I) \quad B'_n = (-1)^{mq+q-1} B_n;$$

$$(II) \quad B'_n = (-1)^{mq} B_n.$$

Remarque.

Dans son mémoire, LEWY adopte dans les deux cas (I) et (II), comme chemin d'intégration, un chemin à une seule branche, dont le point de départ est un point β sur l'axe réel du plan t ($\beta \geq 0$), l'argument de t étant nul en ce point, et dont le point d'arrivée est, pour (I), le point $-\rho_j z$ défini par (5/8), pour (II), le point $\rho_j z$ défini par (5/9).

Dans le cas (II), notre définition coïncide avec celle de LEWY en prenant $\beta = +\infty$. Dans le cas (I), notre définition revient à ajouter au chemin de LEWY un chemin à deux branches symétriques par rapport à l'axe réel allant de $-\infty$ à β , sur lesquelles $\text{Arg } t$ varie de $-\pi$ à 0 ou de $+\pi$ à 0; sur ce chemin, l'intégrale de $\frac{e^t}{\bar{t}^\lambda}$ sera donc réelle (son expression sera en général une intégrale en valeur principale de CAUCHY), et par suite, passer du chemin de LEWY au nôtre revient à modifier $f(z)$ dans (5/11) d'une quantité égale à $f_0(z)$ multipliée par une quantité réelle.

Toutefois, les choix de chemins que nous avons faits rendent l'étude à l'infini des solutions (§ 5,3) plus facile que le choix de LEWY; en outre, les formules finales de LEWY renferment des intégrales en valeur principale de CAUCHY qui compliquent inutilement les résultats; ces intégrales sont ici incorporées dans une formule globale.

5,22 Traduction des conditions aux limites.

On suit la méthode du § 4,22.

Propriétés des intégrales $L_{j,\lambda}(z)$.

1° Sur la surface libre (z réel positif) :

$$(5/13) \quad L_{q-j,\lambda} = \overline{L_{j,\lambda}} \quad (j = 1, 2, \dots, q-1).$$

Il ne suffit plus ici de s'assurer que les extrémités de Γ_{q-j} et Γ_j sont symétriques par rapport à l'axe réel, comme au § 4,22; il nous faut démontrer que Γ_{q-j} et Γ_j peuvent être pris symétriques par rapport à l'axe réel et que sur ces chemins, en des points symétriques, les arguments de t sont opposés; car, d'après la définition de t^λ (§ 3,21), $\frac{e^{\pm t}}{\bar{t}^\lambda}$ prendra des valeurs conjuguées pour t et $\bar{t}$, d'où (5/13).

On vérifie sur (5/8) et (5/9) que les arguments de t aux points d'arrivée de Γ_{q-j} et Γ_j sont opposés pour $z = x$ réel positif.

Dans le cas (I), les arguments de t au point de départ des deux branches de Γ_j sont opposés ($+\pi$ et $-\pi$). Si nous prenons Γ_{q-j}^1 symétrique de Γ_j^2 par rapport à l'axe réel et Γ_{q-j}^2 symétrique de Γ_j^1 , sur Γ_{q-j} et Γ_j les arguments de t seront opposés en des points symétriques.

Dans le cas (II), l'argument de t au point de départ $+\infty$ est nul et l'on prend directement Γ_{q-j} symétrique de Γ_j par rapport à l'axe réel, d'où la même conclusion que dans le cas (I);

2° sur le fond ($z = r \cdot e^{-ip\frac{\pi}{2q}}$, r réel positif) :

$$(5/14) \quad L_{q-j+1,\lambda} = \overline{L_{j,\lambda}} \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

On reprend le raisonnement du § 4,22 en le complétant comme on vient de le faire en ce qui concerne les arguments.

Calcul de $f'(z)$.

Dans le cas (I), on a :

$$(-\rho_j z)^\lambda = (-\rho_j)^\lambda z^\lambda \quad \text{d'après} \quad (5/8),$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{d}{dz} L_{j,\lambda} = (-1)^{mq+q-1} \frac{e^{-\rho_j z}}{\rho_j^{q-1} \cdot z^\lambda}.$$

Dans le cas (II), on a :

$$(\rho_j z)^\lambda = \rho_j^\lambda \cdot z^\lambda \quad \text{d'après} \quad (5/9),$$

d'où :

$$\frac{d}{dz} L_{j,\lambda} = (-1)^{mq} \cdot \frac{e^{-\rho_j z}}{\rho_j^{q-1} \cdot z^\lambda}.$$

Compte tenu de $\sum \frac{a_j}{\rho_j^{q-1}} = 0$ d'après (2/40), on trouve dans les deux cas, par dérivation de (5/11) :

$$\frac{df}{dz} = \sum_{j=1}^q \left\{ \gamma_j \rho_j e^{\rho_j z} + B'_n a_j \cdot \rho_j \cdot e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda}(z) \right\}.$$

Traduction des conditions aux limites (5/2) et (5/3).

(5/13) et (5/14) remplaçant (4/10) et (4/11), les calculs sont identiques à ceux du § 4,22. On en déduit que la solution générale du problème non homogène, pour une valeur donnée de n , est :

$$(5/15) \quad f(z) = A \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} + B'_n \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda}(z),$$

A étant une constante réelle arbitraire.

5,23 Solutions fondamentales du problème.

Raisonnant comme au § 4,23, nous appellerons « *solutions fondamentales* » du problème initial, tel qu'il a été posé au § 1,7, les fonctions suivantes :

$$(5/6) \quad f_0(z) = \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z};$$

$$(5/16) \quad f_{1,\lambda}(z) = C_n \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda}(z),$$

λ étant défini par (5/4), $L_{j,\lambda}(z)$ par (5/12); C_n est une constante réelle qu'on choisira de manière à simplifier les formules. On remarquera que (5/16) est solution de (5/1) avec :

$$(I) \quad B_n = (-1)^{mq+q-1} \cdot C_n;$$

$$(II) \quad B_n = (-1)^{mq} \cdot C_n.$$

D'après ce qu'on a dit au § 2,3, nous pouvons énoncer :

« La fonction $f(z)$ la plus générale qui, pour $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, vérifie les conditions imposées au potentiel complexe d'ondes liquides 2 D (§ 1,7), et qui n'admet pas d'autre singularité à distance finie que l'origine, est une combinaison linéaire à coefficients réels, finie ou infinie, des solutions fondamentales (5/6), (5/16). »

Seules, les combinaisons finies seront considérées (cf. § 2,3).

5,24 Autres représentations des solutions fondamentales.

L'étude est ici beaucoup plus compliquée que celle faite au § 4,24. Différentes étapes sont nécessaires.

5,241 RÉDUCTION DES SOLUTIONS $f_{1,\lambda}(z)$.

Premier cas : $\lambda < 0$.

D'après (5/4), ceci a lieu pour $n < 0$ ou $m < -P$. Nous poserons :

$$\lambda = -\lambda' \quad (\lambda' > 0).$$

Le principe de la méthode de réduction repose sur des intégrations par parties du modèle :

$$(I) \quad e^{\rho_j z} L_{j,\lambda}(z) = (-\rho_j z)^{\lambda'} - \lambda' e^{\rho_j z} L_{j,\lambda+1};$$

$$(II) \quad e^{\rho_j z} L_{j,\lambda}(z) = -(\rho_j z)^{\lambda'} + \lambda' e^{\rho_j z} L_{j,\lambda+1},$$

la signification à donner à $(-\rho_j z)^{\lambda'}$ ou $(\rho_j z)^{\lambda'}$ étant celle qui résulte de (5/8) ou (5/9), ce qui nous assure de pouvoir extraire $z^{\lambda'}$ de ces puissances. On obtient ainsi, en itérant les formules précédentes et en tenant compte de (5/10) :

$$(I) \quad e^{\rho_j z} L_{j,\lambda}(z) = (-1)^{mq+q} \left[\frac{z^{\lambda'}}{\rho_j^q} + \frac{\lambda' z^{\lambda'-1}}{\rho_j^{q+1}} + \dots + \frac{\lambda' (\lambda' - 1) \dots (\lambda' - l + 1)}{\rho_j^{q+l}} z^{\lambda'-l} \right] \\ + (-1)^{l+1} \lambda' (\lambda' - 1) \dots (\lambda' - l) e^{\rho_j z} L_{j,\lambda+l+1};$$

$$(II) \quad e^{\rho_j z} L_{j,\lambda}(z) = (-1)^{mq+1} \left[\frac{z^{\lambda'}}{\rho_j^q} + \lambda' \frac{z^{\lambda'-1}}{\rho_j^{q+1}} + \dots + \frac{\lambda' (\lambda' - 1) \dots (\lambda' - l + 1)}{\rho_j^{q+l}} z^{\lambda'-l} \right] \\ + \lambda' (\lambda' - 1) \dots (\lambda' - l) e^{\rho_j z} L_{j,\lambda+l+1},$$

l désignant un entier positif quelconque si λ' n'est pas entier, inférieur à λ' si λ' est entier.

Remplaçant dans (5/16), on met en évidence, compte tenu de (2/36), l'expression :

$$(5/17) \quad E_{\lambda',l}(z) = (-1)^{mq+1} \left[\frac{S_{-1}}{\Gamma(\lambda' + 1)} z^{\lambda'} + \frac{S_{-2}}{\Gamma(\lambda')} z^{\lambda'-1} + \dots + \frac{S_{-l-1}}{\Gamma(\lambda' - l + 1)} z^{\lambda'-l} \right],$$

ce qui nous permet d'écrire, si l'on choisit :

$$(I) \quad C_n = \frac{(-1)^{q-1}}{\Gamma(\lambda' + 1)};$$

$$(II) \quad C_n = \frac{1}{\Gamma(\lambda' + 1)},$$

soit :

$$(I \text{ et } II) \quad B_n = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(\lambda' + 1)};$$

$$(5/18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I) \quad f_{1,\lambda}(z) = E_{\lambda',l}(z) + \frac{(-1)^{q+l}}{\Gamma(\lambda' - l)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} L_{j,\lambda+l+1}; \\ (II) \quad f_{1,\lambda}(z) = E_{\lambda',l}(z) + \frac{1}{\Gamma(\lambda' - l)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} L_{j,\lambda+l+1}. \end{array} \right.$$

Distinguons alors deux cas :

1° λ est négatif entier.

Ceci nécessite :

$$m = -hp \quad (h = 1, 2, \dots) \quad \text{d'où} \quad \lambda' = (2h - 1)q.$$

On trouve alors aisément que (5/18) se réduit, avec $l = \lambda' - 1$, à la formule unique :

$$(5/19) \quad f_{1, -(2h-1)q}(z) = E_{\lambda', \lambda' - 1}(z) - 1;$$

donc, $f_{1,\lambda}(z)$ est alors un polynôme en z . Ce résultat contient celui du premier cas du § 4,24.

2° λ est négatif non entier.

Si l'on adopte $l = [\lambda']$ (partie entière de λ'), on voit que l'exposant de t dans $L_{j,\lambda+l+1}$ est compris entre 0 et 1. Ceci nous engage à introduire la fonction :

$$(5/20) \quad g_\sigma(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\sigma}(z) \quad (0 < \sigma < 1, \sigma \neq 1).$$

$$(I) \quad L_{j,\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt;$$

$$(II) \quad L_{j,\sigma} = \int_{\Gamma_j} \frac{e^{-t}}{t^\sigma} dt,$$

les chemins d'intégration restant toujours ceux qui ont été définis au § 5,21, pour chacun des deux cas (I) et (II).

En adoptant ici $\sigma = 1 + [\lambda'] - \lambda'$, nous mettons (5/18) sous la forme :

$$(5/21) \quad \begin{cases} \text{(I)} & f_{1,\lambda}(z) = E_{\lambda',[\lambda']} (z) + (-1)^{[\lambda'] + q} \cdot g_{\sigma}(z) \\ \text{(II)} & f_{1,\lambda}(z) = E_{\lambda',[\lambda']} (z) + g_{\sigma}(z) \end{cases} \quad (\sigma = 1 + [\lambda'] - \lambda').$$

Ces formules n'ont pas d'analogues dans le cas $p = 1$ traité au § 4,24. On vérifie aisément que si $\sigma \rightarrow 0$ (donc, $[\lambda'] \rightarrow \lambda' - 1$), (5/21) se ramène à (5/19).

Deuxième cas : $\lambda > 0$.

Ceci a lieu pour $n \geq 0$, ou $m \geq -P$.

La méthode de réduction utilise encore des intégrations par parties du modèle suivant :

$$(I) \quad e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda}(z) = -\frac{1}{(\lambda-1)(-\rho_j z)^{\lambda-1}} + \frac{1}{\lambda-1} e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda-1}(z);$$

$$(II) \quad e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda}(z) = -\frac{1}{(\lambda-1)(\rho_j z)^{\lambda-1}} - \frac{1}{\lambda-1} e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda-1}(z).$$

En procédant comme dans le premier cas, on obtient par itération de ces formules :

$$(I) \quad e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda}(z) = (-1)^{mq+q} \left[\frac{1}{(\lambda-1)\rho_j^{q-1} z^{\lambda-1}} - \dots + \frac{(-1)^{l-1}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-l)\rho_j^{q-l} z^{\lambda-l}} \right] \\ + \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-l)} e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda-l};$$

$$(II) \quad e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda}(z) = (-1)^{mq+1} \left[\frac{1}{(\lambda-1)\rho_j^{q-1} z^{\lambda-1}} - \dots + \frac{(-1)^{l-1}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-l)\rho_j^{q-l} z^{\lambda-l}} \right] \\ + \frac{(-1)^l}{(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-l)} e^{\rho_j z} \cdot L_{j,\lambda-l},$$

l étant un entier positif quelconque pour λ non entier, et inférieur à λ si λ est entier.

En remplaçant dans (5/16), on met en évidence l'expression :

$$(5/22) \quad H_{\lambda,l}(z) = (-1)^{mq+q} \left[\frac{S_0 \Gamma(\lambda-1)}{z^{\lambda-1}} - \frac{S_1 \Gamma(\lambda-2)}{z^{\lambda-2}} + \dots + (-1)^{l-1} \frac{S_{l-1} \Gamma(\lambda-l)}{z^{\lambda-l}} \right],$$

où nous faisons abstraction provisoirement de ce que $S_0 = \dots = S_{q-2} = 0$. Ceci nous permet d'écrire :

$$(5/23) \quad \begin{cases} \text{(I)} & f_{1,\lambda}(z) = \frac{C_n}{\Gamma(\lambda)} H_{\lambda,l}(z) + C_n \frac{\Gamma(\lambda-l)}{\Gamma(\lambda)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} L_{j,\lambda-l}; \\ \text{(II)} & f_{1,\lambda}(z) = \frac{C_n}{\Gamma(\lambda)} (-1)^{q-1} H_{\lambda,l}(z) + C_n (-1)^l \frac{\Gamma(\lambda-l)}{\Gamma(\lambda)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} L_{j,\lambda-l}. \end{cases}$$

Ces formules sont valables pour λ quelconque (même négatif), mais différent d'un entier positif. Si, en particulier, nous faisons $l = q - 1$, H est identiquement nul, et l'exposant de t dans $L_{j,\lambda-q+1}$ est $\lambda - q + 1 = 2m\frac{q}{p} + 1$. Au second membre de (5/23) on retrouve alors (en posant $m = -k$) les expressions considérées *a priori* par LEWY [5] :

$$(I) \quad e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} e^t \cdot t^{\frac{2k}{p} - 1} dt;$$

$$(II) \quad e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} e^{-t} \cdot t^{\frac{2k}{p} - 1} dt.$$

Distinguons maintenant deux cas pour continuer :

1° λ est positif entier.

Ceci nécessite :

$$m = hp \ (h = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{d'où} \quad \lambda = (2h + 1)q.$$

Choisissons ensuite :

$$(I) \quad C_n = \frac{1}{\pi} \Gamma(\lambda);$$

$$(II) \quad C_n = \frac{(-1)^{q-1}}{\pi} \Gamma(\lambda),$$

soit :

$$(I \text{ et } II) \quad B_n = \frac{(-1)^{mq+q-1}}{\pi} \cdot \Gamma(\lambda).$$

Si l'on applique (5/23) pour $l = \lambda - 1$, on est conduit à introduire la fonction :

$$(5/24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I) \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t}{t} dt; \\ (II) \quad f_1(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{array} \right.$$

On trouve alors que (5/23) se ramène à la formule unique :

$$(5/25) \quad f_{1,\lambda}(z) = \frac{1}{\pi} H_{\lambda,\lambda-1}(z) + f_1(z).$$

Pour $\lambda = q$ ($h = 0$), on a :

$$H \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad f_{1,q}(z) \equiv f_1(z),$$

ce qui nous montre que la fonction $f_1(z)$ définie par (5/24) est solution de notre problème aux limites. Pour $p = 1$, on retrouve (4/21).

Pour $\lambda = 3q, 5q, \dots$ ($h = 1, 2, \dots$), on peut simplifier l'expression de H , en tenant compte des valeurs nulles de S_h ; on trouve :

$$(5/26) \quad H_{\lambda, \lambda-1}(z) = (-1)^{hpq+q-1} \sum_{k=q}^{k=2nq} (-1)^k S_{k-1} \frac{(2hq + q - k - 1)!}{z^{2hq+q-k}}.$$

Pour $p = 1$, en remplaçant h par n , (5/25) nous redonne (4/19).

2° λ est positif non entier.

De manière à retrouver les résultats de LEWY lorsque $0 < \lambda < q$, nous choisirons :

$$(I) \quad C_n = (-1)^{[\lambda]+q-1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\sigma) \cdot \Gamma(1-\sigma)};$$

$$(II) \quad C_n = (-1)^{[\lambda]} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\sigma) \cdot \Gamma(1-\sigma)} \quad (\sigma = \lambda - [\lambda]),$$

soit, dans les deux cas :

$$B_n = (-1)^{mq+[\lambda]} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\sigma) \cdot \Gamma(1-\sigma)} = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)}.$$

En adoptant $l = [\lambda]$ dans (5/23), nous serons ramenés à une fonction $g_\sigma(z)$; mais nous devons distinguer deux cas, selon que H disparaît ou non :

a) $0 < \lambda < q$.

Ceci a lieu pour $0 \leq n < P$ ou $-P \leq m < 0$. Si nous posons, avec LEWY, $k = -m$, nous aurons donc :

$$(5/27) \quad \lambda = q - 2k \frac{q}{p} \quad (k = 1, 2, \dots, P).$$

Alors :

$$l = \left[q - 2k \frac{q}{p} \right] = q - 1 - \left[2k \frac{q}{p} \right] < q - 1,$$

et par suite :

$$H_{\lambda, l}(z) \equiv 0.$$

(5/23) donne :

$$(5/28) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (I) & f_{1, q-2k \frac{q}{p}}(z) = (-1)^{\left[2k \frac{q}{p} \right]} \cdot g_\sigma(z) \\ (II) & f_{1, q-2k \frac{q}{p}}(z) = g_\sigma(z) \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \sigma = \lambda - [\lambda] \\ = 1 + \left[2k \frac{q}{p} \right] - 2k \frac{q}{p} \end{array} \right);$$

$$(k = 1, 2, \dots, P).$$

Ces fonctions sont, avec $f_1(z)$ définie par (5/24), les seules utilisées par LEWY dans son mémoire [5]. LEWY parvient aux relations (5/28) d'une manière un peu différente de la nôtre, son point de départ n'étant pas le même.

(5/28) nous montre que, pour les valeurs de σ indiquées ici, $g_\sigma(z)$ définie par (5/20) est solution de notre problème aux limites.

b) $\lambda > q$.

Ceci suppose $n > P$ ou $m > 0$. Prenant λ sous la forme $2m\frac{q}{p} + q$, on trouve que (5/23) s'écrit :

$$(5/29) \quad f_{1,\lambda}(z) = \frac{(-1)^{q-1}}{\pi} \sin \lambda \pi \cdot H_{\lambda,|\lambda|}(z) \\ + \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{\left[2m\frac{q}{p}\right]+1} \cdot g_{\sigma}(z) & \text{(I)} \\ g_{\sigma}(z) & \text{(II)} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \sigma = \lambda - [\lambda] \\ = 2m\frac{q}{p} - \left[2m\frac{q}{p}\right] \end{array} \right).$$

Dans cette expression, $m = 1, 2, \dots$ mais différent d'un multiple de p .

5,242 ÉTUDE DES CHEMINS D'INTÉGRATION Γ_j .

Aussi bien pour l'application de la méthode de LAPLACE aux solutions $f_{1,\lambda}(z)$ que pour l'étude à l'infini de ces solutions, il est indispensable de simplifier les chemins Γ_j considérés jusqu'ici. C'est ce que nous ferons au § 5,243, mais au préalable il est nécessaire d'étudier avec plus de détail ces chemins Γ_j tels qu'ils ont été définis au § 5,21.

A partir de maintenant, il est indiqué, dans le cas II, d'utiliser, au lieu de $\rho_j z$, $-\rho_j z$ défini par :

$$(5/30) \quad \text{Arg}(-\rho_j z) = \pi + \text{Arg}(\rho_j z)$$

[au lieu de $+\pi$, on pourrait adopter dans cette relation $-\pi$, ou même un multiple impair quelconque de π ; certains des résultats ci-dessous seraient modifiés, mais les formules finales du § 5,243 concernant $f_{1,\lambda}(z)$ seraient les mêmes]. Il nous faudra donc remplacer t par $t \cdot e^{-i\pi}$ dans les intégrales relatives au cas II; en outre, Γ_j sera remplacé par Γ''_j allant de $-\infty$ ($\text{Arg } t = +\pi$) à $-\rho_j z$, en lequel l'argument de t sera défini par (5/9) et (5/30).

Pour étudier commodément Γ_j (I) Γ''_j (II), nous supposons ces chemins tracés sur une surface de RIEMANN (Σ) de $\text{Log } t$, pour laquelle la ligne de passage d'un feuillet au suivant sera le *demi-axe imaginaire négatif*, de telle sorte que les feuillets soient définis par :

$$(5/31) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Feuillet } 0: & -\frac{\pi}{2} < \text{Arg } t \leq \frac{3\pi}{2}; \\ \text{Feuillet } s: & 2s\pi - \frac{\pi}{2} < \text{Arg } t \leq 2s\pi + \frac{3\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Dans le cas (I), Γ_j possède deux branches dont les points de départ sont, pour Γ'_j , dans le feuillet -1 , pour Γ''_j , dans le feuillet 0. Dans le cas (II), Γ''_j n'a qu'une branche dont le point de départ est dans le feuillet 0.

Il nous suffira, pour la suite, de savoir dans quels feuillets se trouvent les points d'arrivée $-\rho_j z$ de ces branches, en lesquels nous avons, d'après (5/8), (5/9) et (5/30) :

$$(5/32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \text{Arg}(-\rho_j z) = -p \frac{\pi}{2} + j \cdot p \frac{\pi}{q} + \text{Arg } z; \\ \text{(II)} \quad \text{Arg}(-\rho_j z) = -p \frac{\pi}{2} + j \cdot p \frac{\pi}{q} + \pi + \text{Arg } z. \end{array} \right.$$

Détermination des feuillets utiles de (Σ) .

D'après (5/31), (5/32), l'appartenance de $-\rho_j z$ au feuillet s se traduit par les inégalités :

$$(5/33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad -\frac{p+3}{4} + j \cdot \frac{p}{2q} + \frac{\text{Arg } z}{2\pi} \leq s < -\frac{p-1}{4} + j \cdot \frac{p}{2q} + \frac{\text{Arg } z}{2\pi}; \\ \text{(II)} \quad -\frac{p+1}{4} + j \cdot \frac{p}{2q} + \frac{\text{Arg } z}{2\pi} \leq s < -\frac{p-3}{4} + j \cdot \frac{p}{2q} + \frac{\text{Arg } z}{2\pi}, \end{array} \right.$$

que nous devons résoudre en s , compte tenu de $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$, $-\alpha \leq \text{Arg } z \leq 0$.

Les deux nombres qui encadrent s diffèrent de l'unité, donc déterminent un entier s et un seul, puisqu'une seule des deux bornes est comprise. En outre, si l'on change j en $j+1$, les bornes augmentent de $\frac{p}{2q} < 1$, donc s ne change pas ou augmente au plus d'une unité, c'est-à-dire que les feuillets utiles de (Σ) sont *consécutifs*.

Il nous suffit donc de chercher les valeurs extrêmes de s .

Pour $j=1$, on vérifie que $\frac{p}{2q} + \frac{\text{Arg } z}{2\pi}$ est compris entre 0 et 1 (valeurs exclues), d'où :

$$(I) \quad s = -\frac{p-1}{4};$$

$$(II) \quad s = -\frac{p-3}{4}.$$

Pour $j=q$, compte tenu de ce que $\frac{\text{Arg } z}{2\pi}$ est compris entre $-\frac{1}{2}$ (valeur exclue) et 0 (valeur comprise), on montre facilement que :

$$(I) \quad s = \frac{p-1}{4};$$

$$(II) \quad s = \frac{p+1}{4}.$$

En résumé, il y a $P+1$ valeurs possibles de s , qui sont :

$$(5/34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad s = -\frac{p-1}{4}, -\frac{p-5}{4}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p-1}{4}; \\ \text{(II)} \quad s = -\frac{p-3}{4}, -\frac{p-7}{4}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{p+1}{4}. \end{array} \right.$$

Pour $p=1$, on retrouve $s=0$ en accord avec les résultats du § 4,21.

Remarques.

1° La correspondance (j, s) n'est pas connue en général autrement que par (5/33), sauf pour $j = 1$ et $j = q$; on ne connaît explicitement, ce qui est suffisant pour la suite, que l'ensemble (5/34) des valeurs possibles, d'ailleurs effectivement prises, de s . En outre, cette correspondance (j, s) peut, sauf pour $j = 1$, et $j = q$, dépendre de z dans $\mathcal{O}$, sans que cela modifie l'ensemble (5/34);

2° en opérant comme au § 4,31, on peut interpréter géométriquement les résultats précédents, en construisant les images de $\text{Arg}(-\rho_j z)$ sur des cercles concentriques, pour interpréter les différents feuillets. On verrait ainsi que la ligne de passage de (Σ) pourrait être déplacée de telle manière que l'ensemble (5/34) des valeurs de s ne soit pas modifié; on peut ainsi montrer que la seule position fixe de la ligne de passage adaptée à (5/34), quel que soit $\alpha = \frac{p\pi}{2q}$ et z dans $\mathcal{O}$, est celle que nous avons adoptée pour la définition de (Σ) ; dans les autres cas, si l'on veut conserver (5/34) pour tout z de $\mathcal{O}$, il faut placer la ligne de passage convenablement en fonction de α .

Répartition des points $(-\rho_j z)$ dans les feuillets.

Nous aurons besoin plus loin (§ 5,4) des deux résultats suivants :

1° « Le dernier feuillet utile, soit :

$$(I) \quad s = \frac{p-1}{4};$$

$$(II) \quad s = \frac{p+1}{4},$$

ne contient que des points $-\rho_j z$ pour lesquels $\mathcal{R}(-\rho_j z)$ est strictement positive, sauf dans le seul cas, $j = q$, $z = x$ (réel positif), pour lequel $\mathcal{R}(-\rho_j z) = 0$.

Il suffit pour cela de vérifier qu'en remplaçant la définition (5/31) du feuillet s par $2s\pi - \frac{\pi}{2} < \text{Arg } t \leq 2s\pi + \frac{\pi}{2}$, on retrouve bien, pour $j = q$, les valeurs de s qui correspondent au dernier feuillet, le signe d'égalité n'intervenant que pour $\text{Arg } z = 0$, $j = q$;

2° « Pour $p > 1$, dans chaque feuillet utile de (Σ) , à l'exception du dernier, il existe des points $-\rho_j z$, pour lesquels $\mathcal{R}(-\rho_j z)$ est strictement négative. »

Posons, dans le feuillet s , $2s\pi + \frac{\pi}{2} < \text{Arg}(-\rho_j z) < 2s\pi + \frac{3\pi}{2}$ (égalités exclues). Posons :

$$(I) \quad s = -\frac{p-1}{4} + h;$$

$$(II) \quad s = -\frac{p-3}{4} + h$$

($h = 0, 1, \dots, P - 1$), $h = P$ (dernier feuillet) étant exclu; si l'on remplace $\text{Arg} (-\rho_j z)$ par (5/32) et si l'on résout en j , on trouve dans les deux cas (I) et (II) :

$$(5/35) \quad \left(2h + 1 - \frac{\text{Arg } z}{\pi}\right) \frac{q}{p} < j < \left(2h + 2 - \frac{\text{Arg } z}{\pi}\right) \frac{q}{p},$$

et il faut montrer que ces inégalités déterminent *au moins un* entier j de la suite $1, 2, \dots, q$ quand h prend les valeurs indiquées.

Mais $\text{Arg } z \cdot \frac{q}{p\pi}$ est compris entre $-\frac{1}{2}$ et 0 (valeurs comprises), si bien qu'en faisant prendre à z dans $\mathcal{Q}$ toutes les positions possibles, on obtient par (5/35) la suite d'intervalles :

$$\left(\frac{q}{p}, 2\frac{q}{p} + \frac{1}{2}\right), \left(3\frac{q}{p}, 4\frac{q}{p} + \frac{1}{2}\right), \left(5\frac{q}{p}, 6\frac{q}{p} + \frac{1}{2}\right), \dots, \left(q - 2\frac{q}{p}, q - \frac{q}{p} + \frac{1}{2}\right),$$

dont nous devons montrer que chacun d'eux renferme au moins un entier compris entre 1 et q . Ceci est évident, l'amplitude de chacun de ces intervalles étant $\frac{q}{p} + \frac{1}{2}$, quantité > 1 (car $p < 2q$); en outre, l'extrémité du dernier intervalle est bien $< q$.

Il y a toutefois une remarque importante à faire :

— si $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ($q > p$), le raisonnement précédent peut être fait directement sur (5/35) avec $\text{Arg } z = 0$; autrement dit, dans chaque feuillet utile, autre que le dernier, il existe des ρ_j avec $\mathcal{R} (-\rho_j) < 0$;

— si $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ($q < p$), il n'en est plus ainsi nécessairement, comme on peut le voir sur l'exemple $p = 25$, $q = 16$; pour $h = 2, 5, 6$ et 9, la détermination de j par (5/35) avec $\text{Arg } z = 0$ n'est pas possible; l'intervention de $\text{Arg } z$ est alors indispensable pour assurer la validité de notre théorème.

On trouvera une application de cette remarque au § 5,41.

Application à l'argument réduit de $-\rho_j z$.

Cherchons l'argument réduit de $-\rho_j z$, dans le feuillet 0 de (Σ) , c'est-à-dire dans le plan entaillé suivant le demi-axe imaginaire négatif. L'appartenance de $-\rho_j z$ au feuillet s peut s'écrire, d'après (5/31) et (5/32) :

$$(I) \quad -\frac{\pi}{2} < -p\frac{\pi}{2} + jp\frac{\pi}{q} + \text{Arg } z + \pi - (2s + 1)\pi \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$(II) \quad -\frac{\pi}{2} < -p\frac{\pi}{2} + jp\frac{\pi}{q} + \text{Arg } z + \pi - 2s\pi \leq \frac{3\pi}{2},$$

ce qui nous conduit à poser :

$$(5/36) \quad (I) \quad v = 2s + 1 \quad \text{ou} \quad (II) \quad 2s.$$

(5/34) nous montre alors que ν prend formellement les mêmes valeurs dans les deux cas (I) et (II), précisément :

$$(5/37) \quad \nu = -\frac{p-3}{2}, -\frac{p-7}{2}, \dots, \frac{p+1}{2} \quad (\text{de } 2 \text{ en } 2),$$

ν étant impair dans le cas (I) et prenant, en particulier, les valeurs -1 et $+1$; ν étant pair dans le cas (II) et, en particulier, $\nu = 0$.

Par suite, l'argument réduit de $-\rho_j z$ dans le feuillet 0 de (Σ) est :

$$(5/38) \quad \text{Arg. réd. } (-\rho_j z) = -p \frac{\pi}{2} + j \cdot p \frac{\pi}{q} + \text{Arg } z + \pi - \nu \pi,$$

quel que soit $\text{Arg } z$.

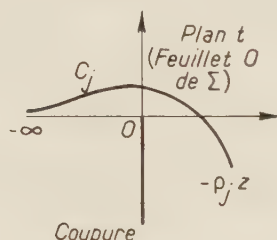


Fig. 24

On en déduit que :

$$(5/39) \quad \text{Arg. réd. } (-\rho_j) = -p \frac{\pi}{2} + jp \frac{\pi}{q} + \pi - \nu \pi$$

mais, si l'on se place dans le feuillet 0 de (Σ) , pour j donné $\neq 1$ ou q , les valeurs correspondantes de ν ne sont pas nécessairement les mêmes dans (5/38) et (5/39). Elles seraient les mêmes pour tout j si l'on convient d'appliquer (5/38) dans le plan entaillé suivant la demi-droite d'angle polaire $-\frac{\pi}{2}$, et (5/39) dans le plan entaillé suivant la demi-droite d'angle polaire $-\frac{\pi}{2} - \text{Arg } z$.

5,243 SIMPLIFICATION DES CHEMINS D'INTÉGRATION Γ_j .

Au § 5,241, nous avons ramené les fonctions $f_{1,\lambda}(z)$ à $g_\sigma(z)$ défini par (5/20) et à $f_1(z)$ définie par (5/24). Nous commencerons donc par simplifier les chemins d'intégration dans ces deux fonctions.

Principe de la méthode.

Les chemins d'intégration Γ_j (I) et Γ''_j (II) étant tracés sur (Σ) , comme au § précédent, nous allons chercher à les ramener à un chemin « direct » C_j allant, dans le feuillet 0 de (Σ) , de $-\infty$ à $-\rho_j z$ (fig. 24), de la manière suivante.

En supposant — $\rho_j z$ dans le feuillet s , chaque branche Γ_j^1 , Γ_j^2 , ou Γ_j'' peut être ramenée à :

1° un chemin allant de $-\infty$ jusqu'au voisinage de l'origine dans le feuillet de départ (feuillet — 1 pour Γ_j^1 , feuillet 0 pour Γ_j^2 et Γ_j'');

2° s tours (pour Γ_j^2 ou Γ_j''), $s + 1$ tours (pour Γ_j^1), de rayon infiniment petit autour de l'origine, dans le sens direct, de manière à amener le point t dans le feuillet s (si s est négatif, « s tours dans le sens direct » signifie « $|s|$ tours dans le sens inverse »);

3° un chemin allant du voisinage de l'origine à $-\rho_j z$, dans le feuillet s .

Il nous suffira d'évaluer les intégrales le long de ces diverses portions pour obtenir des intégrales prises le long de C_j .

Application à $g_\sigma(z)$.

Compte tenu de la modification de chemin dans le cas (II), g_σ s'écrit :

$$(5/40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & g_\sigma(z) = \frac{1}{2\Gamma(1-\sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt \quad 0 < \sigma < 1; \\ \text{(II)} & g_\sigma(z) = -\frac{e^{i\pi\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j'} \frac{e^t}{t^\sigma} dt \quad \sigma \neq 1. \end{array} \right.$$

Les intégrales convergent à l'origine pour des chemins aboutissant en ce point; ceci permet de faire aboutir à l'origine les portions 1° et 3° précédentes. En outre, puisque $\sigma < 1$, l'intégrale de $\frac{e^t}{t^\sigma}$ le long d'un cercle centré en O, de rayon infiniment petit, est nulle; par suite, la contribution de la portion 2° est nulle.

Dans le feuillet 0, on a :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{t^\sigma} dt = e^{-i\pi\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{-\sigma} dt = e^{-i\pi\sigma} \cdot \Gamma(1-\sigma) \quad (\text{car } t = -t \cdot e^{i\pi}),$$

et dans le feuillet — 1 :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{t^\sigma} dt = e^{i\pi\sigma} \cdot \Gamma(1-\sigma) \quad (\text{car } t = |t| e^{-i\pi}).$$

Dans le feuillet s , $t^\sigma = e^{2i\pi s\sigma} (t^\sigma)_0$, en désignant par $(t^\sigma)_0$ la valeur de t^σ au point homologue du feuillet 0. En sorte que :

$$\underbrace{\int_0^{-\rho_j z} \frac{e^t}{t^\sigma} dt}_{\text{Feuillet } s} = e^{-2i\pi s\sigma} \cdot \underbrace{\int_0^{-\rho_j z} \frac{e^t}{t^\sigma} dt}_{\text{Feuillet } 0},$$

les chemins d'intégration étant homologues dans les feuillets s et 0.

Enfin, C_j équivaut ici à la réunion, dans le feuillet 0, des deux chemins $(-\infty, 0)$ et $(0, -\rho_j z)$, soit :

$$\int_{C_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt = e^{-i\pi\sigma} \cdot \Gamma(1-\sigma) + \underbrace{\int_0^{-\rho_j z} \frac{e^{-t}}{t^\sigma} dt}_{\text{Feuillet 0}}.$$

Il suffit alors de rassembler les résultats précédents et de reporter dans (5/40) pour obtenir :

$$(5/41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad g_\sigma(z) = \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} (\cos \pi \sigma - e^{-(2s+1)i\pi\sigma}) \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-2si\pi\sigma} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt; \\ \text{(II)} \quad g_\sigma(z) = \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} (e^{-2si\pi\sigma} - 1) \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-(2s-1)i\pi\sigma} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt. \end{array} \right.$$

Application à $f_1(z)$.

$f_1(z)$ s'écrit :

$$(5/42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t}{t} dt; \\ \text{(II)} \quad f_1(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{\Gamma_j'} \frac{e^t}{t} dt. \end{array} \right.$$

La fonction intégrée étant ici uniforme, chaque branche Γ_j^i , Γ_j^s ou Γ_j'' est immédiatement réductible à C_j et à s tours dans le sens direct autour de l'origine pour Γ_j^s et Γ_j'' , ou à $s+1$ tours (Γ_j^i). Aucun des chemins de décomposition ne doit ici aboutir à l'origine.

L'intégrale de $\frac{e^t}{t}$ le long d'un cercle centré à l'origine décrit dans le sens direct valant $2i\pi$, nous aurons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{1}{2} \int_{\Gamma_j} \frac{e^t}{t} dt = \int_{C_j} \frac{e^t}{t} dt + (2s+1)i\pi; \\ \text{(II)} \quad \int_{\Gamma_j'} \frac{e^t}{t} dt = \int_{C_j} \frac{e^t}{t} dt + 2si\pi. \end{array} \right.$$

Reportant dans (5/42) et utilisant (5/36), on obtient la formule valable dans les deux cas (I) et (II) :

$$(5/43) \quad f_1(z) = i \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot v + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t} dt,$$

formule qui, pour $p=1$, redonne (4/22) après remplacement de Γ_j^+ par Γ_j^- (équivalent à C_j), donc de $-i\pi$ par $+i\pi$.

Application aux fonctions $f_{1,\lambda}(z)$.

Il nous suffit de remplacer $g_\sigma(z)$ par (5/41) dans (5/21), (5/28) et (5/29), et $f_1(z)$ par (5/43) dans (5/25). Il n'y a de calculs que pour $g_\sigma(z)$, en tenant compte des valeurs de σ indiquées dans (5/21), (5/28), (5/29). On introduira ν défini par (5/36). Le calcul montre alors que nous obtenons les mêmes formules dans les deux cas (I) et (II), à condition de remplacer, pour λ non entier, les fonctions $f_{1,\lambda}(z)$ considérées jusqu'ici par des fonctions « modifiées » $f_{1,\lambda}^*(z)$ définies comme suit :

$$(5/44) \quad f_{1,\lambda}^*(z) = \begin{cases} \text{(I)} & f_{1,\lambda}(z) + f_0(z) \cos\left(2m \frac{q\pi}{p}\right); \\ \text{(II)} & f_{1,\lambda}(z) + f_0(z), \end{cases}$$

fonctions qui sont aussi des solutions du problème aux limites.

Dans tout ce qui suit, nous n'utiliserons plus, pour λ non entier, que les fonctions $f_{1,\lambda}^*(z)$. Comme pour λ entier, d'après (5/19), d'une part, (5/25) et (5/43), d'autre part, la distinction entre les deux cas (I) et (II) est supprimée; nous en concluons que l'emploi de $f_{1,\lambda}^*(z)$ nous permet de supprimer totalement la distinction entre les deux cas (I) et (II).

Nous allons maintenant donner les formules relatives aux diverses fonctions $f_{1,\lambda}(z)$ (λ entier) et $f_{1,\lambda}^*(z)$ (λ non entier) qui sont valables dans les deux cas (I) et (II) et seront seules employées dans la suite :

Premier cas : $\lambda < 0$.

On pose $\lambda = -\lambda'$; dans (5/1) on prend $B_n = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)}$; $E_{\lambda',1}(z)$ est défini par (5/17).

1° λ est négatif entier.

$$(5/19) \quad \begin{aligned} m &= -hp \quad (h = 1, 2, \dots), & \lambda' &= (2h-1)q. \\ f_{1,-(2h-1)q}(z) &= E_{\lambda',\lambda'-1}(z) - 1 = \text{polynôme en } z. \end{aligned}$$

2° λ est négatif non entier.

Avec $\sigma = 1 + [\lambda'] - \lambda'$, le calcul donne :

$$(5/45) \quad \begin{aligned} f_{1,\lambda}^*(z) &= E_{\lambda',[\lambda']}(z) + \sum_{j=1}^q a_j e^{e_j z} e^{-2\nu i \pi m \frac{q}{p}} \\ &\quad - \frac{e^{i\pi\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{e_j z} e^{-2\nu i \pi m \frac{q}{p}} \int_{c_j} \frac{e^t dt}{t^\sigma}. \end{aligned}$$

Deuxième cas : $\lambda > 0$.

1° λ est positif entier.

$$m = hp \quad (h = 0, 1, 2, \dots), \quad \lambda = (2h+1)q.$$

Dans (5/1), on prend $B_n = (-1)^{mq+q-1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\pi}$. On obtient :

$$(5/46) \quad f_{1,(2h+1)q}(z) = \frac{1}{\pi} H_{\lambda,\lambda-1}(z) + i \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot v + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \int_{c_j} \frac{e^t}{t} dt,$$

$H_{\lambda,\lambda-1}(z)$ étant donné par (5/26).

2° λ est positif non entier.

Dans (5/1) on prend $B_n = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)}$. Deux cas à distinguer :

a) $0 < \lambda < q$.

On pose :

$$\lambda = q - 2k \frac{q}{p} \quad (k = 1, 2, \dots, P), \quad \sigma = \lambda - [\lambda].$$

Le calcul donne :

$$(5/47) \quad f_{1,q-2k\frac{q}{p}}^*(z) = \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{2v\pi k \frac{q}{p}} - \frac{e^{i\pi\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{2v\pi k \frac{q}{p}} \int_{c_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt.$$

b) $\lambda > q$.

$$\lambda = q + 2m \frac{q}{p} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

$H_{\lambda,l}(z)$ étant défini par (5/22), le calcul conduit à :

$$(5/48) \quad f_{1,\lambda}^*(z) = \frac{(-1)^{q-1}}{\pi} \sin \lambda \pi \cdot H_{\lambda,[\lambda]}(z) + \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-2v\pi m \frac{q}{p}} - \frac{e^{i\pi\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-2v\pi m \frac{q}{p}} \int_{c_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt$$

$$(\sigma = \lambda - [\lambda]).$$

Ce sont ces expressions qui nous donneront immédiatement, au § 5,3, l'étude à l'origine et à l'infini de ces fonctions.

5,244 AUTRE REPRÉSENTATION DE $f_{1,\lambda}(z)$.

Les formules obtenues au paragraphe précédent nous permettent d'obtenir une autre représentation des fonctions $f_{1,\lambda}(z)$ qui nous sera utile au § 5,4 pour retrouver les formules d'ISAACSON.

Définition de $h_\lambda(z)$.

Lorsque l'on fait $B_n = 1$ dans l'équation (5/1) on retrouve (3/17) dont une intégrale particulière a été obtenue sous la forme (3/21). Nous allons nous servir de ce résultat pour transformer $f_{1,\lambda}(z)$.

Considérons le plan t comme le feuillet 0 de (Σ) , c'est-à-dire entaillons-le suivant la demi-droite d'angle polaire $-\frac{\pi}{2}$, en sorte que dans ce plan :

$$-\frac{\pi}{2} < \text{Arg } t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Dans ce plan, C_j sera le chemin défini au § 5,243, chemin direct allant de $-\infty$ à $-\rho_j z$ (fig. 25).

Considérons un autre plan ζ , entaillé suivant la demi-droite d'angle polaire $-\frac{\pi}{2} - \text{Arg } z$, de sorte que dans ce plan :

$$-\frac{\pi}{2} - \text{Arg } z < \text{Arg } \zeta \leq \frac{3\pi}{2} - \text{Arg } z.$$

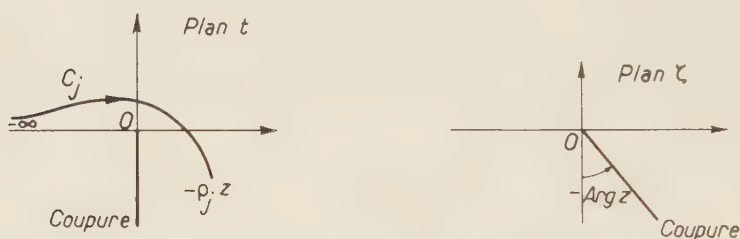


Fig. 25

Ce plan nous servira à définir un argument réduit pour $-\rho_j$; d'après (5/39) nous avons alors dans ce plan :

$$(5/39) \quad \text{Arg. réd. } (-\rho_j) = -p \frac{\pi}{2} + jp \frac{\pi}{q} + \pi - \nu \pi,$$

la correspondance (ν, j) étant la même dans cette formule et dans les formules du § 5,243.

Un calcul simple nous montre alors, à partir de (5/39), que, si $\lambda = q + 2m \frac{q}{p}$, on a :

$$(5/49) \quad \frac{(-\rho_j)^{\lambda-1}}{\rho_j} = e^{i\pi(\lambda-1)} \cdot (-1)^{mq} \cdot e^{-2\nu i\pi m \frac{q}{p}} \cdot a_j,$$

a_j étant toujours donné par (2/23).

Ce choix de coupures, dans les plans t et ζ , nous permet d'affirmer que (3/20) subsiste même avec les arguments réduits ici utilisés, donc que (3/21) est applicable. Nous poserons donc :

$$(5/50) \quad h_\lambda(z) = \sum_{j=1}^q \frac{(-\rho_j)^{\lambda-1}}{\sigma_j} e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^\lambda} dt,$$

et ce sera, d'après le § 3,21, une intégrale particulière de (5/1) avec $B_n = 1$.

Dans ce qui suit nous allons réduire (5/50) suivant le procédé du § 5,241, en remarquant que la validité de (3/20) nous permet d'écrire :

$$(-\rho_j z)^\lambda = (-\rho_j)^\lambda \cdot z^\lambda.$$

Réduction de $h_\lambda(z)$ pour $\lambda < 0$.

Calculs très analogues à ceux du § 5,241 [premier cas (I)], à ce fait près qu'il ne faut pas utiliser ici (5/10). Compte tenu de (5/17), on obtient facilement :

$$(5/51) \quad \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)} h_\lambda(z) = E_{\lambda',l}(z) + \frac{(-1)^{mq+l+1}}{\Gamma(\lambda'-l)} \sum_{j=1}^q \frac{(-\rho_j)^{\lambda-1}}{\sigma_j} e^{\rho_j z} \int_{c_j} e^t \cdot t^{\lambda'-l-1} dt$$

(l entier quelconque si $\lambda' = -\lambda$ non entier, $l < \lambda'$ si λ' est entier).

1° λ est négatif entier.

Soit :

$$\lambda' = (2h-1)q \quad (h = 1, 2, \dots).$$

Faisant $l = \lambda' - 1$ dans (5/51), on voit que le deuxième terme du second membre se réduit à -1 . Comparant à (5/19), on en déduit que :

$$(5/52) \quad f_{1,\lambda}(z) = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)} h_\lambda(z) \quad \text{pour} \quad \lambda = -(2h-1)q, m = -hp.$$

2° λ est négatif non entier.

On prend $l = [\lambda']$ dans (5/51) et l'on tient compte de (5/49). En comparant avec (5/45), on trouve aussitôt :

$$(5/53) \quad f_{1,\lambda}^*(z) = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)} h_\lambda(z) + \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-2\pi i \pi m \cdot \frac{q}{p}}.$$

Réduction de $h_\lambda(z)$ pour $\lambda > 0$.

On procède comme au § 5,241 [deuxième cas (I)]. Compte tenu de (5/22), on trouve :

$$(5/54) \quad h_\lambda(z) = \frac{(-1)^{mq+q-1}}{\Gamma(\lambda)} H_{\lambda,l}(z) + \frac{\Gamma(\lambda-l)}{\Gamma(\lambda)} \sum_{j=1}^q \frac{(-\rho_j)^{\lambda-1}}{\sigma_j} e^{\rho_j z} \int_{c_j} \frac{e^t}{t^{\lambda-l}} dt$$

(l entier quelconque si λ non entier, $l < \lambda$ si λ est entier).

1° λ est positif entier.

Soit :

$$\lambda = (2h+1)q \quad (h = 0, 1, 2, \dots).$$

On fait $l = \lambda - 1$. Comparant ensuite (5/54) et (5/46), on trouve :

$$(5/55) \quad f_{1,\lambda}(z) = (-1)^{mq+q-1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\pi} \cdot h_{\lambda}(z) + i \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot v \quad \text{pour} \quad \begin{aligned} \lambda &= (2h+1)q, \\ m &= hp. \end{aligned}$$

2° λ est positif non entier.

Deux cas à distinguer :

a) $0 < \lambda < q$.

Ici :

$$\lambda = q - 2k \frac{q}{p} \quad (k = 1, 2, \dots, P).$$

On prend $l = [\lambda]$ dans (5/54). Tenant compte de (5/49) et comparant avec (5/47), on obtient :

$$(5/56) \quad f_{1,\lambda}^*(z) = \frac{(-1)^{kq}}{\Gamma(1-\lambda)} h_{\lambda}(z) + \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-2vi\pi k \frac{q}{p}} \quad \text{pour} \quad \lambda = q - 2k \frac{q}{p}.$$

b) $\lambda > q$.

Ici :

$$\lambda = q + 2m \frac{q}{p} \quad (m = 1, 2, \dots, \text{non multiple de } p).$$

On fait $l = [\lambda]$ dans (5/54), on tient compte de (5/49) et l'on compare avec (5/48), d'où :

$$(5/57) \quad f_{1,\lambda}^*(z) = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)} h_{\lambda}(z) + \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-2vi\pi m \frac{q}{p}} \quad \text{pour} \quad \lambda = q + 2m \frac{q}{p}.$$

Conclusion.

Les formules (5/53), (5/56) et (5/57) sont, en fait, identiques. Il n'y a donc que trois cas à distinguer, et nous rassemblons ci-dessous les résultats :

1° $\lambda = q + 2m \frac{q}{p}$ n'est pas entier : donc, $m \neq hp$ (h entier positif, négatif ou nul).

Nous avons la formule unique :

$$(5/58) \quad f_{1,\lambda}^*(z) = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)} h_{\lambda}(z) + \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} e^{-2vi\pi m \frac{q}{p}};$$

2° λ est entier négatif : $m = -hp$, $\lambda = -(2h-1)q$. On a :

$$(5/52) \quad f_{1,\lambda}(z) = \frac{(-1)^{mq}}{\Gamma(1-\lambda)} h_{\lambda}(z) = \text{polynôme en } z;$$

3° λ est entier positif : $m = hp$, $\lambda = (2h+1)q$. On a :

$$(5/55) \quad f_{1,\lambda}(z) = (-1)^{mq+q-1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\pi} \cdot h_{\lambda}(z) + i \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot v.$$

Remarques.

— On vérifie que, dans les formules (5/52), (5/55), (5/58), les coefficients de $h_\lambda(z)$ sont égaux aux valeurs des B_n indiquées à la fin du § 5,243.

— Les formules obtenues montrent bien que les fonctions f ou f^* sont intégrales de (5/1), les valeurs des coefficients de $e^{\rho_j z}$ dans la sommation $\sum_{j=1}^q$ qui figure au second membre de (5/55) et (5/58) étant nécessitées par les conditions aux limites (5/2) et (5/3). L'intervention de v dans ces formules, surtout dans (5/55), rend problématique une démonstration directe à partir de (5/1), (5/2) et (5/3).

5,245 APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LAPLACE.

Nous allons appliquer ici les résultats du § 3,23, tout d'abord à $h_\lambda(z)$.

Expressions de $h_\lambda(z)$.

Deux expressions sont possibles :

1° *Application du § 3,231.*

D'après la définition du § 5,244, le chemin C'_f associé à C_f dans le changement de variable : $t + \rho_j z = \tau$, est toujours réductible à une demi-droite Δ d'angle polaire compris entre $\frac{\pi}{2}$ (exclu d'après notre définition de la coupure du plan t) et π ; Δ occupe une position indifférente par rapport aux $\rho_j z$ dont la partie réelle est ≥ 0 , mais laisse à droite les $\rho_j z$ dont la partie réelle est strictement négative (puisque les C_f laissent l'origine du plan t à droite). Appelant Δ' la demi-droite qui correspond à Δ dans le changement de variable $\tau = z\zeta$, on en conclut que si P_1 est un chemin du plan ζ réductible à Δ' sans passer par aucun ρ_j , la coupure du plan ζ étant définie par rapport à P_1 comme au § 3,222 et appartenant au demi-plan $\Re(z\zeta) < 0$, (3/25) s'applique et donne :

$$(5/59) \quad h_\lambda(z) = \frac{e^{-i\pi(\lambda-1)}}{\Gamma(\lambda)} \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta.$$

Cette relation est valable, que λ soit ou non entier (si l'on tient compte des résultats du § 3,13) mais *positif*;

2° *Application du § 3,232.*

Ramenons la coupure du plan ζ suivant Δ' comme au § 3,232; si l'on appelle $\mathcal{C}_0$ cette coupure décrite sur ses deux bords dans le sens direct, nous aurons :

$$(5/60) \quad h_\lambda(z) = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_0} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta \quad (\lambda > 0 \text{ non entier}).$$

Application à $f_{1,\lambda}^(z)$ et $f_{1,\lambda}(z)$.*

Utilisons ces résultats pour transformer les formules (5/52), (5/55), (5/58).

Quelques remarques s'imposent. On peut interpréter (5/52) à l'aide de (3/24), mais nous n'aurons pas besoin de la formule correspondante. Pour (5/55), une fois

remplacé $h_\lambda(z)$ par (5/59), on ne voit pas la possibilité d'exprimer le résultat par une intégrale, comme dans la formule (4/20) pour le cas $p = 1$, ceci à cause du facteur ν ; une telle formule condensée n'est d'ailleurs pas utile pour la suite (cf. §§ 5,42 et 5,43). Seule, (5/58) admet une représentation simple que nous allons déduire de (5/60).

Nous nous limiterons à $\lambda > 0$, seul cas utile dans la suite.

Si l'on remplace $h_\lambda(z)$ par (5/60) dans (5/58), on obtient :

$$f_{1,\lambda}^*(z) = \frac{(-1)^{mq}}{2i\pi} \left[\int_{\gamma_0} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta + 2i\pi \sum_{j=1}^q (-1)^{mq} a_j e^{-2\nu i\pi m \frac{q}{p}} e^{\rho_j z} \right].$$

Il nous faut interpréter le terme complémentaire. En accord avec (5/30), posons :

$$\text{Arg}(\rho_j) = \text{Arg}(-\rho_j) - \pi,$$

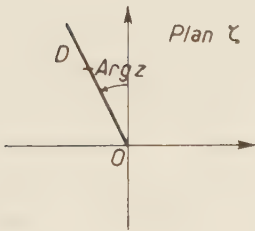


Fig. 26

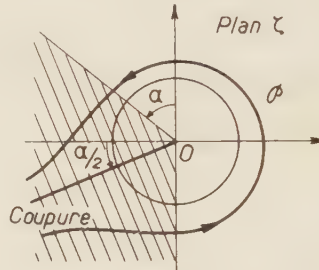


Fig. 27

et utilisons (5/39). Si l'on entaille le plan ζ suivant la demi-droite D (fig. 26), d'angle polaire $\frac{\pi}{2} - \text{Arg } z$, de sorte que dans ce plan :

$$-\frac{3\pi}{2} - \text{Arg } z < \text{Arg } \zeta \leq \frac{\pi}{2} - \text{Arg } z,$$

(5/39) nous montre que l'argument réduit de ρ_j , que nous pourrions définir dans ce plan, sera défini par :

$$(5/61) \quad \text{Arg. réd.}(\rho_j) = -p \frac{\pi}{2} + jp \frac{\pi}{q} - \nu \pi,$$

la correspondance (ν, j) étant la même dans cette formule et dans (5/58). Nous remarquons, en outre, que D est frontière du demi-plan $\mathcal{R}(z\zeta) \leq 0$, et qu'on peut passer de la coupure du plan ζ définie au § 3,222 [et utilisée pour (5/60)] à D par un déplacement dans le demi-plan $\mathcal{R}(z\zeta) \leq 0$, les arguments étant définis par rapport à ces deux coupures par continuité.

L'emploi de (5/61) conduit à la formule analogue à (5/49), d'où :

$$(-1)^{mq} a_j e^{-2\nu i\pi m \frac{q}{p}} = \frac{\rho_j^{\lambda-1}}{\sigma_j} = \text{Résidu de } \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)},$$

ce résidu étant calculé par rapport à la coupure D.

Il est donc naturel de chercher à ramener $\mathcal{D}_0$ sur D ; ce n'est licite que si $\frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} \rightarrow 0$ quand $\zeta \rightarrow \infty$; nous prendrons $0 < \lambda < q$, seul cas où nous utiliserons (5/62). $\mathcal{D}_0$ étant confondu avec D , si l'on appelle $\mathcal{C}$ un chemin qui coïncide avec $\mathcal{C}_0$ sur les bords de la coupure, mais qui contient tous les ρ_j à son intérieur, on aura :

$$(5/62) \quad f_{1,\lambda}^*(z) = \frac{(-1)^{mq}}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{\lambda-1}}{R(\zeta)} d\zeta$$

pour $0 < \lambda < q$.

Déplaçons maintenant la coupure dans le demi-plan $\Re(z\zeta) < 0$; pour que l'intégrale converge à l'infini quel que soit z dans $\mathcal{D}$, il faut que les branches infinies de $\mathcal{C}$ (et par suite, la coupure) soient comprises dans l'angle $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{3\pi}{2}\right)$, hachuré sur la figure 27. Nous ferons le même choix qu'ISAACSON [4], en plaçant la coupure suivant la demi-droite d'angle polaire $\pi + \frac{\alpha}{2}$. Le chemin $\mathcal{C}$ aura ses branches infinies dans l'angle hachuré de part et d'autre de la coupure ainsi choisie, tournera autour de l'origine dans le sens direct, et comprendra le cercle unité entre ses branches.

Remarque.

Il est très facile de vérifier directement que (5/62) satisfait aux conditions aux limites (5/2) et (5/3). La démonstration figure chez ISAACSON [4] ; elle se base sur la possibilité du déplacement et de la déformation de $\mathcal{C}$ sans rencontre de ρ_j , et sur les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^{\lambda-1}}{P(\zeta)} \quad \text{réel} \quad \text{pour} \quad \zeta \text{ réel}, \quad \frac{\zeta^\lambda}{R(\zeta)} \quad \text{réel} \quad \text{pour} \quad \zeta = re^{i\alpha} \quad \left(\alpha = \frac{p\pi}{2q}\right), \\ R(\zeta) \equiv P(\zeta) \cdot (\zeta + i). \end{aligned}$$

Formule analogue pour $f_0(z)$.

$f_0(z)$ étant définie par (5/6), on a évidemment, d'après (2/24) :

$$(5/63) \quad f_0(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{z\zeta} \cdot \frac{\zeta^{q-1}}{R(\zeta)} d\zeta,$$

avec le même chemin $\mathcal{C}$ que dans la formule (5/62).

5,3

ÉTUDE A L'ORIGINE ET A L'INFINI DES SOLUTIONS FONDAMENTALES

5,31 **Étude de $f_0(z)$.**

$f_0(z)$ est définie par (5/6).

Étude à l'origine.

Cette fonction est *finie* à l'origine et l'on a $f_0(0) = 1$.

Étude à l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

Il se présente ici une différence fondamentale avec le cas $p = 1$ étudié au § 4,31. En effet, d'après le § 2,42, pour $p > 1$, il existe toujours au moins un ρ_j tel que $\mathcal{R} \rho_j$ soit *strictement* positive, et par suite certainement des j et z tels que $\exp(\rho_j z)$ tende vers l'infini quand z tend vers l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

Dans toute la suite, nous désignerons par Σ'_j une sommation étendue aux valeurs de j pour lesquelles $\mathcal{R} \rho_j z \geq 0$, pour l'argument de z considéré. Avec cette notation :

$$(5/64) \quad f_0(z) \approx \Sigma'_j a_j e^{\rho_j z} \quad z \rightarrow \infty (\mathcal{O}, \arg).$$

5,32 Étude de $f_{1,\lambda}(z)$.

Nous utiliserons les formules (5/19), (5/45) à (5/48), ce qui nécessite que nous étudions au préalable à l'origine et à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) les expressions :

$$e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt \quad (\text{pour } 0 < \sigma \leq 1).$$

5,321 LEMMES.

1° *Étude à l'origine.*

Lorsque $0 < \sigma < 1$, $\int_{C_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt$ est finie pour $z = 0$, puisque l'intégrale est convergente.

Pour $\sigma = 1$, on a :

$$\int_{C_j} \frac{e^t}{t} dt \sim \text{Log } z \quad (z \rightarrow 0);$$

il suffit de reprendre l'étude du § 4,331, en y remplaçant Γ_j^+ par C_j .

2° *Étude à l'infini* ($\mathcal{O}$, arg).

Pour :

$$0 < \sigma \leq 1, \quad e^{\rho_j z} \int_{C_j} \frac{e^t}{t^\sigma} dt > 0,$$

lorsque $z \rightarrow \infty (\mathcal{O}, \arg)$.

Ici encore, on fait la démonstration comme au § 3,13.

5,322 ÉTUDE POUR $\lambda < 0$.

Formules (5/19) et (5/45).

Étude à l'origine.

Les fonctions $f_{1, -(2h-1)q}(z)$ et $f_{1,\lambda}^*(z)$ restent finies pour $z = 0$.

Étude à l'infini ($\mathcal{O}$, $\arg$).

Pour λ négatif entier :

$$\lambda = -(2h-1)q \quad (h = 1, 2, \dots),$$

on a :

$$(5/19) \quad f_{1, -(2h-1)q}(z) = E_{\lambda', \lambda'-1}(z) - 1$$

sans simplification.

Pour λ négatif non entier, dans (5/45) tendent vers zéro, tous les termes $e^{\rho_j z} \int_{c_j}^{\infty} \frac{e^t}{t^\sigma} dt$, d'après le lemme, ainsi que toutes les exponentielles $e^{\rho_j z}$, pour lesquelles $\Re(\rho_j z) < 0$. Il reste :

$$(5/65) \quad f_{1, \lambda}^*(z) \approx E_{\lambda', [\lambda']}(z) + \sum_j a_j e^{\rho_j z} e^{-2\pi i \pi m \frac{q}{p}}.$$

5,323 ÉTUDE POUR $\lambda > 0$.

Étude à l'origine.

Il se présente ici plusieurs cas :

— si $0 < \lambda < q$, (5/47) montre que $f_{1, \lambda}^*(z)$ reste finie pour $z = 0$;

— si $\lambda = q$, $f_1(z)$ d'après (5/43) et le lemme, admet l'origine comme singularité logarithmique, plus précisément :

$$(5/66) \quad f_1(z) \sim \frac{1}{\pi} \text{Log } z, \quad (z \rightarrow 0);$$

— si $\lambda > q$, on utilise (5/46) ou (5/48); dans les deux cas, c'est le terme dominant de H qui impose sa loi, d'où, d'après (5/22) :

$$(5/67) \quad \frac{f_{1, (2h+1)q}(z)}{f_{1, \lambda}^*(z)} = \frac{O(1)}{z^{\lambda-q}} \quad (z \rightarrow 0).$$

Étude à l'infini ($\mathcal{O}$, $\arg$).

Pour λ positif entier :

$$\lambda = (2h+1)q \quad (h = 0, 1, 2, \dots),$$

on se sert de (5/46). Dans cette formule, tendent vers zéro : H , tous les termes $e^{\rho_j z} \int_{c_j}^{\infty} \frac{e^t}{t} dt$, et les exponentielles $e^{\rho_j z}$ pour lesquelles $\Re(\rho_j z) < 0$. Il reste donc :

$$(5/68) \quad f_{1, (2h+1)q}(z) \approx i \sum_j a_j e^{\rho_j z}.$$

Pour λ positif non entier, on opère pareillement sur (5/47) et (5/48), ce qui donne :

$$(5/69) \quad f_{1, \lambda}^*(z) \approx \sum_j a_j e^{\rho_j z} e^{-2\pi i \pi m \frac{q}{p}}$$

en faisant, pour $\lambda = q - 2k\frac{q}{p}$, $m = -k$ dans ce résultat.

5,33 Conclusion.

Il résulte de l'étude précédente que, contrairement au cas $p = 1$, aucune des solutions fondamentales n'est bornée à l'infini $(\mathcal{Q}, \arg)$. Le comportement à l'infini $(\mathcal{Q}, \arg)$ des combinaisons linéaires à coefficients réels de ces solutions n'est pas évident et sera l'objet de toute l'étude du § 5,4. L'alternative obtenue au § 4,34 ne présente plus le caractère d'évidence du cas $p = 1$; elle sera, au contraire, une conséquence de l'étude qui va suivre.

5,4 RECHERCHE DES SOLUTIONS BORNÉES A L'INFINI $(\mathcal{Q}, \arg)$ APPLICATION AU PROBLÈME DES ONDES LIQUIDES

5,40 Généralités.

Aucune des solutions fondamentales n'étant, d'après le § 5,33, « physiquement acceptable », au sens du § 4,41, nous sommes amenés à étudier de ce point de vue les combinaisons linéaires à coefficients réels (ou, abrégativement, « combinaisons ») de ces solutions.

L'étude, dans le cas $p = 1$ (§ 4,4), consécutive à la définition posée au § 4,41 pour des solutions « physiquement acceptables », n'avait pas fait apparaître de difficultés; en particulier, les solutions bornées non nulles sur la surface libre tendaient vers zéro à l'infini $(\mathcal{Q}, \arg)$ en dehors de cette surface libre.

Il n'en est plus de même ici; nous montrerons au § 5,41 que, si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, on retrouve les conclusions du cas $p = 1$; mais, si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, il peut arriver qu'une solution bornée sur la surface libre ne le soit pas dans tout le domaine $\mathcal{Q}$, circonstance qui n'est pas physiquement acceptable. Il nous faut donc élargir la condition du § 4,41; nous poserons :

(Condition $\mathcal{B}$) « Une solution $f(z)$ de notre problème sera dite « *physiquement acceptable* » pour le problème des ondes liquides, si elle est bornée à l'infini $(\mathcal{Q}, \arg)$ et non nulle sur la surface libre. »

Nous avons ensuite le :

Théorème.

Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, toute solution du problème bornée à l'infini sur la surface libre ($z = x$ réel positif) est bornée à l'infini $(\mathcal{Q}, \arg)$; si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, il n'en est plus de même.

Ce théorème a été démontré directement par LEWY [5], à partir du théorème de PHRAGMEN-LINDELÖF; nous montrerons dans ce qui suit qu'on peut l'obtenir à partir des calculs mêmes de recherche des solutions bornées à l'infini $(\mathcal{Q}, \arg)$.

La condition $\mathcal{B}$ élimine *a priori* des combinaisons, les fonctions $f_{1,\lambda}(z)$ avec $\lambda < 0$. En effet, d'après (5/19) et (5/65), leur comportement à l'infini renferme, outre des exponentielles $\exp(\rho_j z)$, des puissances de z contenues dans E , alors que toutes les autres fonctions ne renferment que des exponentielles dans leur comportement asymptotique. On peut espérer, par combinaison linéaire, faire disparaître les exponentielles, mais non

les puissances de z , dont la plus élevée subsistera. Ainsi, toute combinaison des solutions fondamentales renfermant une solution $f_{1,\lambda}(z)$ avec $\lambda < 0$, est nécessairement non bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

Les seules combinaisons qu'on puisse donc envisager *a priori* pour satisfaire à la condition $\mathcal{B}$, sont les suivantes :

- 1° $f_0(z)$ avec $f_{1,q-2k\frac{q}{p}}^*(z) (k = 1, 2, \dots, P)$: ces combinaisons sont finies à l'origine;
- 2° les fonctions précédentes et $f_1(z)$: ces combinaisons sont logarithmiquement infinies à l'origine;
- 3° les fonctions contenues en 2° et des $f_{1,\lambda}^*(z)$ avec $\lambda > q$, pouvant comprendre des $f_{1,(2h+1)q}(z)$.

Ce sont les combinaisons les plus générales. Si λ_1 est la plus grande valeur de λ qui y figure, ces combinaisons sont infinies à l'origine, comme $\frac{1}{z^{\lambda_1 - q}}$.

5,41 Recherche d'une solution finie à l'origine et bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

5,411 FORME DE LA SOLUTION.

D'après ce qui a été dit au § 5,40, une telle solution est de la forme :

$$(5/70) \quad F_0(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^P A_k \cdot f_{1,q-2k\frac{q}{p}}^*(z),$$

les A_k étant des coefficients *réels* à déterminer. Nous avons pris *a priori* le coefficient de $f_0(z)$ égal à l'unité, puisque $F_0(z)$ n'est défini qu'à une constante réelle multiplicative près.

5,412 TRADUCTION DE LA CONDITION $\mathcal{B}$.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons désormais :

$$(5/71) \quad \omega = \frac{q}{p} \pi, \quad \eta = e^{2i\omega} = e^{\frac{2i q \pi}{p}}.$$

D'après (5/64) et (5/69) avec $m = -k$, il vient :

$$(5/72) \quad F_0(z) \approx \sum_j a_j e^{\rho_j z} \left[1 + \sum_{k=1}^P A_k \eta^{vk} \right],$$

v pouvant prendre les valeurs (5/37).

La condition $\mathcal{B}$ nécessite que le coefficient de toute exponentielle pour laquelle $\mathcal{R}_{\rho_j} z$ est *strictement positif*, soit nul.

Reportons-nous aux résultats obtenus au § 5,242 pour la répartition des points — $\rho_j z$ dans les feuillets de (Σ) , en les traduisant par rapport à v et à $\rho_j z$. A toute valeur de v , sauf la dernière, correspondent des points $\rho_j z$, avec $\mathcal{R}_{\rho_j} z > 0$ (strictement);

pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$, ceci reste vrai avec $z = x$ réel positif, c'est-à-dire si l'on se borne à considérer la surface libre; par contre, pour $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, en se bornant à prendre $z = x$, on aurait des valeurs de v qui ne figureraient pas dans (5/72), indépendamment de la dernière, car les j correspondants seraient tels que $\Re \rho_j < 0$. Enfin, pour $v = \frac{p+1}{2}$, tous les $\rho_j z$ associés ont une partie réelle < 0 , sauf dans le seul cas $j = q$ et $z = x$, pour lequel $\Re (\rho_q x) = 0$.

Il résulte de là que la condition $\mathcal{B}$ se traduit par :

$$(5/73) \quad 1 + \sum_{k=1}^p A_k \cdot \eta^{vk} = 0 \quad \text{pour} \quad v = -\frac{p-3}{2}, \dots, \frac{p-3}{2} \\ (\text{de } 2 \text{ en } 2),$$

soit P équations linéaires par rapport aux P inconnues A_k

5,413 DÉTERMINATION DES A_k .

Considérons le polynôme :

$$(5/74) \quad S(\zeta) \equiv 1 + \sum_{k=1}^p A_k \zeta^k.$$

Les équations (5/73) traduisent que $S(\zeta)$ doit s'annuler pour $\zeta = \eta^v \left(v = -\frac{p-3}{2} \right.$
à $\frac{p-3}{2}$ de 2 en 2).

Ces P valeurs η^v sont différentes et distinctes de $\eta^{\frac{p+1}{2}}$, car si v' et v'' sont deux nombres de la suite $-\frac{p-3}{2}, \dots, \frac{p-3}{2}, \frac{p+1}{2}$, la relation $\eta^{v'} = \eta^{v''}$ entraîne $(v' - v'')q = hp$ (h entier) d'où $v' - v'' = \text{multiple de } p$, ce qui est impossible, car $|v' - v''| < p$.

Comme, en outre, $S(0) = 1$, il en résulte que $S(\zeta)$, donc les A_k , sont déterminés de manière unique.

Puisque, d'autre part, les racines de $S(\zeta)$ sont deux à deux inverses, donc conjuguées, ceci prouve que les A_k sont réels.

Ceci montre que l'on peut écrire :

$$S(\zeta) \equiv \prod_{k=1}^p \left(\eta^{\frac{p-4k+1}{2}} - \zeta \right),$$

ou encore :

$$(5/75) \quad S(\zeta) \equiv 1 + \sum_{k=1}^p A_k \zeta^k \equiv \prod_{k=1}^p \left[1 - \zeta (-1)^q e^{i\pi(4k-1)\frac{q}{p}} \right].$$

L'emploi de $S(\zeta)$ permet en outre de trouver facilement, comme l'a montré LEWY, l'expression explicite des A_k .

En effet, d'après la valeur des zéros de $S(\zeta)$, on trouve que $S(\zeta)$ vérifie l'équation aux différences :

$$(5/76) \quad \left(\eta \zeta - \eta^{\frac{p-1}{2}} \right) S(\zeta \eta^2) \equiv \left(\zeta - \eta^{-\frac{p+1}{2}} \right) S(\zeta).$$

En remplaçant dans cette relation $S(\zeta)$ par (5/74), on obtient :

$$\Lambda_{k-1} (\eta^{2k-1} - 1) - A_k \eta^{\frac{p-1}{2}} (\eta^{2k} - 1),$$

ce qui donne, après quelques calculs faciles, compte tenu des $\eta^{\frac{p}{2}} = (-1)^q$:

$$(5/77) \quad A_0 = 1, \quad \frac{A_k}{A_{k-1}} = (-1)^q \frac{\sin(2k-1)\omega}{\sin 2k\omega}.$$

On en déduirait l'expression de A_k , qui ne nous sera pas utile. Remarquons qu'on a, par un calcul direct :

$$(5/78) \quad A_p = (-1)^p.$$

5,414 ÉTUDE A L'INFINI DE $F_0(z)$.

En dehors de la surface libre, nous avons vu (§ 5,412) que $v = \frac{p+1}{2}$ ne figure pas dans (5/72), et par conséquent, les relations (5/73) font disparaître le second membre de (5/72). Donc, $F_0(z)$ tend vers zéro lorsque $z \rightarrow \infty (\mathcal{O}, \arg)$ en dehors de la surface libre.

Sur la surface libre ($z = x$ réel positif), $v = \frac{p+1}{2}$ réapparaît dans (5/72) associé à la seule valeur $j = q$; donc :

$$F_0(x) \approx a_q \cdot e^{-ix} \left(1 + \sum_{k=1}^p A_k \eta^{k \cdot \frac{p+1}{2}} \right) = a_q \cdot e^{-ix} \cdot S \left(\eta^{\frac{p+1}{2}} \right),$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant (5/75) et (2/23) pour $j = q$:

$$(5/79) \quad F_0(x) \approx e^{-ix} \cdot \frac{\prod_{j=1}^p \left(1 - e^{4ij \frac{q\pi}{p}} \right)}{\prod_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left(1 + e^{ijp \frac{\pi}{q}} \right)}.$$

Les racines de $S(\zeta)$ ayant été démontrées distinctes de $\eta^{\frac{p+1}{2}}$, cette expression n'est pas nulle. LEWY [5], puis ISAACSON [4], ont montré, en liaison avec la loi de réciprocité quadratique, que l'expression (5/79) pouvait se simplifier; on obtient :

$$(5/80) \quad F_0(x) \approx \sqrt{\frac{p}{q}} e^{-ix + \left[\left(\frac{q}{p} - 1 \right) \frac{\pi}{4} \right]}.$$

5,415 CONCLUSION.

D'après ce qu'on a dit au § 5,40, si une combinaison de solutions fondamentales vérifie $\mathcal{O}$ elle ne peut être que singulière en O, mise à part celle dont on vient de démontrer l'existence et, de ce fait, l'unicité. Nous énonçons :

« A une constante réelle multiplicative près, il n'existe qu'une seule solution du problème aux limites qui vérifie la condition $\mathcal{O}$ et qui soit finie à l'origine. Cette solution tend vers zéro quand z tend vers l'infini ($\mathcal{O}$, arg) en dehors de la surface libre, et sur la surface libre, on a (5/80). »

Cette solution est la généralisation directe au cas $p > 1$, de la solution R.B du cas $p = 1$, représentée par $f_0(z)$. En outre, (5/80) généralise (4/27').

Une autre conséquence immédiate est la suivante :

« Il n'existe pas de solution non identiquement nulle du problème aux limites qui soit finie à l'origine, bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) et qui tende vers zéro à l'infini sur la surface libre. »

Il est intéressant de signaler ici les conclusions auxquelles on parviendrait si l'on imposait seulement à $F_0(z)$ d'être bornée à l'infini sur la surface libre. D'après ce qu'on a signalé au § 5,412, pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$, on parvient encore à (5/73), et par suite aux mêmes conclusions que ci-dessus, en particulier l'unicité; de ce fait est démontré le théorème énoncé au § 5,40; ce qu'on avait fait pour $p = 1$ revient d'ailleurs à cela. Au contraire, pour $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, pour $z = x$ certaines valeurs de v peuvent être absentes au second membre de (5/72) (cf. le cas $p = 25$, $q = 16$ au § 5,242); le nombre d'équations (5/73) pourrait donc être inférieur à P. Donc, l'unicité serait détruite et, en outre, $F_0(z)$ ne serait plus bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) dans tout le domaine $\mathcal{O}$.

5,416 REPRÉSENTATION D'ISAACSON POUR $F_0(z)$.

Utilisons (5/62) et (5/63). (5/70) devient :

$$F_0(z) = \frac{1}{2i} \int_{\mathcal{C}} e^{z\zeta} \frac{\zeta^{q-1} + \sum_{k=1}^p A_k (-1)^{kq} \zeta^{q-1-2k\frac{q}{p}}}{R(\zeta)} \cdot d\zeta,$$

en adoptant pour $\mathcal{C}$ le chemin précisé à propos de la formule (5/62).

Le numérateur du second membre s'écrit :

$$\zeta^{q-1} \left(1 + \sum_{k=1}^p A_k (-1)^{kq} \zeta^{-2k\frac{q}{p}} \right) = \zeta^{q-1} S \left[(-1)^q \zeta^{-2\frac{q}{p}} \right] = \zeta^{q-1} \prod_{k=1}^p \left(1 - \zeta^{-2\frac{q}{p}} e^{i\pi(4k-1)\frac{q}{p}} \right),$$

d'après (5/75); ce qu'on peut écrire aussi :

$$\zeta^{\frac{q}{p}-1} \prod_{k=1}^p \left[\zeta^{\frac{2q}{p}} - e^{i\pi(4k-1)\frac{q}{p}} \right].$$

Si donc nous posons :

$$(5/81) \quad G(\zeta) = \frac{\zeta^{\frac{q}{p}-1} \prod_{k=1}^p \left[\zeta^{2\frac{q}{p}} - e^{i\pi(4k-1)\frac{q}{p}} \right]}{R(\zeta)} = \frac{g(\zeta)}{\zeta + i},$$

la notation $g(\zeta)$ étant celle utilisée par ISAACSON [4] et ROSEAU [9], nous obtenons :

$$(5/82) \quad F_0(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta.$$

Nous pouvons modifier le chemin $\mathcal{C}$ considéré jusqu'à présent, compte tenu de la propriété suivante, dont on trouvera la démonstration dans [4] :

« La fonction $G(\zeta)$ n'admet pas de pôle dans le demi-plan $\mathcal{R}\zeta > 0$. »

Comme l'intégrale (5/82) est convergente à l'origine, nous pouvons donc déformer $\mathcal{C}$ dans le demi-plan $\mathcal{R}\zeta > 0$, et l'amener à passer par l'origine. Finalement,

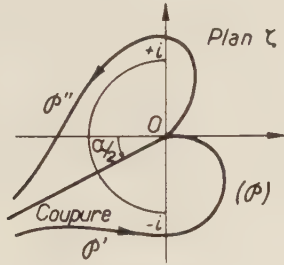


Fig. 28

$\mathcal{C}$ se compose de deux branches dans le plan ζ entaillé suivant la demi-droite d'angle polaire $\pi + \frac{\alpha}{2}$ (fig. 28) :

— la première part de l'infini en dessous de la coupure, laisse le point $-i$ à gauche et aboutit en O;

— la seconde part de O, laisse le point $+i$ à gauche et va à l'infini au-dessus de la coupure;

— en outre, aucun de ces arcs ne traverse le demi-cercle unité tracé dans le demi-plan $\mathcal{R}\zeta < 0$.

C'est le chemin adopté par ISAACSON. On peut élargir un peu les conditions imposées aux branches infinies (cf. § 5,245); de même, pour la seconde branche, il suffit qu'elle laisse à gauche, non pas $+i$, mais le premier ρ_j que l'on rencontre en décrivant, à partir de $+i$, le demi-cercle unité tracé.

Cette représentation généralise celle de FRIEDRICHS (4/24) relative au cas $p = 1$.

5,417 APPLICATION.

Comme au § 4,42, on voit qu'à la solution $F_0(z)$ correspond une onde stationnaire à la surface du liquide (« onde bornée sur la rive »), que nous prendrons comme onde de référence, au point de vue amplitude et phase à l'infini sur la surface libre.

5,42 **Recherche des solutions logarithmiquement infinies à l'origine et bornées à l'infini** ($\mathcal{O}$, $\arg$).

5,421 **FORME DES SOLUTIONS.**

D'après le § 5,40, les solutions cherchées seront de la forme :

$$(5/83) \quad F_1(z) = M f_0(z) + B_0 f_1(z) + \sum_{k=1}^P B_k f_{1,q-2k\frac{q}{p}}^*(z),$$

les quantités $M, B_0, B_1, \dots, B_P$ étant des constantes *réelles*.

Indépendamment du fait que les constantes précédentes interviennent dans $F_1(z)$ de manière homogène, la condition $\mathcal{O}$ ne peut permettre à elle seule de déterminer F_1 d'une manière unique, car toute fonction $aF_0(z) + bF_1(z)$, où a et b sont deux constantes réelles quelconques, serait encore logarithmiquement infinie à l'origine et bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, $\arg$).

Nous imposerons comme condition supplémentaire, le comportement à l'infini de $F_1(z)$ sur la surface libre, par rapport à celui de $F_0(z)$ (§ 5,414), en posant :

$$(5/84) \quad F_1(x) \approx \Omega \cdot a_q \cdot e^{-ix} \cdot S \left(\eta^{\frac{p+1}{2}} \right),$$

Ω étant une constante à laquelle nous donnerons l'une des trois valeurs suivantes :

$\Omega = 0$, soit $F_1(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$;

$\Omega = 1$, $F_1(z)$ a même amplitude et même phase que $F_0(z)$ pour $z = x \rightarrow \infty$;

$\Omega = i$, $F_1(z)$ a même amplitude que $F_0(z)$ mais est en quadrature avec elle, pour $z = x \rightarrow \infty$.

5,422 **TRADUCTION DES CONDITIONS IMPOSÉES.**

D'après (5/64), (5/68) et (5/69), il vient :

$$F_1(z) \approx \sum_j a_j e^{\rho_j z} \left[M + \nu i B_0 + \sum_{k=1}^P B_k \eta^{\nu k} \right]$$

et, le raisonnement du § 5,412 étant applicable, on en déduit :

$$(5/85) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^P B_k \eta^{\nu k} + M + \nu i B_0 = 0 \quad \left(\nu = -\frac{p-3}{2} \text{ à } \frac{p-3}{2} \text{ de } 2 \text{ en } 2 \right), \\ \sum_{k=1}^P B_k \eta^{\nu k} + M + \nu i B_0 = \Omega \cdot S(\eta^\nu) \quad \left(\nu = \frac{p+1}{2} \right), \end{array} \right.$$

soit seulement $P + 1$ équations à $P + 2$ inconnues, mais nous allons voir que la condition de réalité des inconnues fournit une relation supplémentaire.

5,423 DÉTERMINATION DES CONSTANTES.

LEWY se borne à donner les résultats, mais la détermination des constantes se fait simplement par une méthode analogue à celle du § 5,413.

Considérons pour cela le polynôme :

$$(5/86) \quad T(\zeta) \equiv \sum_{k=1}^P B_k \zeta^k.$$

Puisque $S(\eta^v) = 0$ pour $v = -\frac{p-3}{2}$ à $\frac{p-3}{2}$ de 2 en 2, les relations (5/85) s'écrivent :

$$T(\eta^v) - \Omega S(\eta^v) + M + v i B_0 = 0 \quad \left(v = -\frac{p-3}{2} \text{ à } \frac{p+1}{2} \text{ de } 2 \text{ en } 2 \right).$$

En retranchant les relations consécutives à partir de la première, on en déduit que le polynôme en ζ de degré P :

$$T(\zeta \eta^2) - T(\zeta) - \Omega [S(\zeta \eta^2) - S(\zeta)] + 2 i B_0$$

doit être nul pour :

$$\zeta = \eta^v \quad \left(v = -\frac{p-3}{2} \text{ à } \frac{p-3}{2} \text{ de } 2 \text{ en } 2 \right).$$

Puisque $T(0) = 0$, $S(0) = 1$, on voit que ce polynôme est égal à $2 i B_0 S(\zeta)$, ce qui nous donne l'identité :

$$T(\zeta \eta^2) - T(\zeta) \equiv \Omega [S(\zeta \eta^2) - S(\zeta)] + 2 i B_0 [S(\zeta) - 1].$$

Remplaçant alors S et T par leurs expressions développées et identifiant, on obtient :

$$(5/87) \quad \frac{B_k}{A_k} = \Omega + \frac{2 i B_0}{\eta^{2k} - 1} = \Omega + B_0 (\cotg 2 k \omega - i)$$

et, puisque par hypothèse les B_k doivent être réels, il nous faut annuler la partie imaginaire du second membre :

$$1^\circ \quad \Omega = 0.$$

On trouve :

$$B_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad B_k = 0 \quad \text{et} \quad M = 0. \quad \text{Soit} \quad F_1(z) \equiv 0;$$

$$2^\circ \quad \Omega = 1.$$

On trouve :

$$B_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad B_k = A_k \quad \text{et} \quad M = 1. \quad \text{Soit} \quad F_1 \equiv F_0;$$

$$3^\circ \quad \Omega = i.$$

On trouve :

$$(5/88) \quad B_0 = 1, \quad B_k = A_k \cdot \cotg 2 k \omega.$$

Pour avoir M , on peut employer (5/85) pour $\nu = -1$ et $\nu = +1$ (cas I) ou pour $\nu = 0$ (cas II). On trouve aisément :

$$(I) \quad M = -\mathcal{R} T(\eta);$$

$$(II) \quad M = -T(1).$$

5,424 CONCLUSIONS.

Des calculs précédents, il résulte les conclusions suivantes :

1° « Il n'existe pas de solution non identiquement nulle du problème aux limites qui soit logarithmiquement infinie à l'origine, bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) et qui tende vers zéro à l'infini sur la surface libre »;

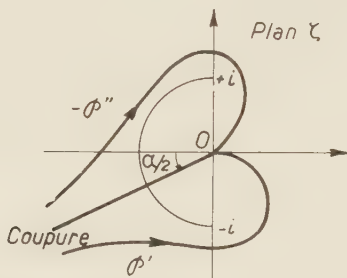


Fig. 29

2° « Il n'existe pas de solution autre que $F_0(z)$ qui, à l'origine, soit au plus logarithmiquement infinie, qui soit bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) et qui, à l'infini sur la surface libre, présente même amplitude et même phase que $F_0(z)$ »;

3° « Il n'y a qu'une seule solution du problème qui soit logarithmiquement infinie à l'origine, bornée à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) et qui, à l'infini sur la surface libre, présente même amplitude que $F_0(z)$ mais une phase en quadrature avec celle de $F_0(z)$. »

En dehors de la surface libre, cette solution tend vers zéro quand $z \rightarrow \infty$ ($\mathcal{O}$, arg); on le voit comme au § 5,414;

4° « Les seules solutions du problème qui soient bornées à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) et qui, à l'origine, sont soit finies, soit logarithmiquement infinies, sont de la forme $aF_0(z) + bF_1(z)$, où a et b sont deux constantes réelles arbitraires. »

On le voit en faisant $\Omega = a + ib$ quelconque.

Les remarques des §§ 4,42 et 4,43 (limitées à la solution SL) sont ici valables; en particulier :

« A une amplitude et une phase données à l'infini, il ne correspond qu'une seule onde progressive se dirigeant vers la rive si l'on suppose cette onde logarithmiquement infinie sur la rive. »

5,425 REPRÉSENTATION D'ISAACSON POUR $F_1(z)$.

Nous appellerons désormais $F_1(z)$ la solution unique qui correspond à $\Omega = i$.

Utilisons (5/55) pour $\lambda = q$ et (5/58) pour transformer F_0 et F_1 donnés par (5/70) et (5/83). Compte tenu de (5/73) et de (5/85), on obtient :

$$F_0(z) = \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{kq} A_k}{\Gamma\left(1 - q + 2k \frac{q}{p}\right)} h_{q-2k \frac{q}{p}}(z) + \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot S(\eta^v),$$

$$F_1(z) = \frac{(-1)^{q-1}}{\pi} \cdot \Gamma(q) \cdot h_q(z) + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{kq} B_k}{\Gamma\left(1 - q + 2k \frac{q}{p}\right)} h_{q-2k \frac{q}{p}}(z) + i \sum_{j=1}^q a_j e^{\rho_j z} \cdot S(\eta^v),$$

d'où l'on déduit :

$$F_1(z) - iF_0(z) = \frac{(-1)^{q-1}}{\pi} \cdot \Gamma(q) \cdot h_q(z) + \sum_{k=1}^p (-1)^{kq} \frac{B_k - iA_k}{\Gamma\left(1 - q + 2k \frac{q}{p}\right)} h_{q-2k \frac{q}{p}}(z)$$

et, d'après (5/87) :

$$B_k - iA_k = \frac{2iA_k}{\gamma^{2k} - 1}.$$

Utilisons maintenant (5/59) et le chemin P_1 correspondant. Un calcul de substitution et quelques réductions donnent :

$$\begin{aligned} F_1(z) - iF_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{P_1} e^{z\zeta} \frac{\zeta^{q-1} + \sum_{k=1}^p A_k (-1)^{kq} \zeta^{q-1-2k \frac{q}{p}}}{R(\zeta)} d\zeta \\ (5/89) \quad &= \frac{1}{\pi} \int_{P_1} e^{z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

d'après les calculs du § 5,416, $G(\zeta)$ étant définie par (5/81).

Appelons $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ les deux branches dont se compose le chemin $\mathcal{C}$ défini au § 5,416. D'après la définition de P_1 et l'absence de pôles de $G(\zeta)$ dans le demi-plan $\Re \zeta > 0$, on voit que P_1 est réductible à $-\mathcal{C}''$. Compte tenu de (5/82), on tire alors de (5/89) :

$$(5/90) \quad F_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''} e^{z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta.$$

C'est la deuxième formule donnée par ISAACSON [4]. On voit que l'on passe de (5/82) à (5/90) en changeant le sens de la branche $\mathcal{C}''$ et en multipliant le résultat par i (fig. 29).

Cette formule généralise la formule (4/23) de FRIEDRICHS obtenue pour $p = 1$.

Remarque.

La solution $F_1(z)$ est la généralisation de la solution S.L considérée pour le cas $p = 1$.

5,43 **Recherche des solutions les plus générales bornées à l'infini** ($\mathcal{O}$, arg).

5,431 **FORME DES SOLUTIONS.**

La forme la plus générale des solutions infinies à l'origine comme $\frac{1}{z^{\frac{2m}{p}}}$ et susceptibles d'être bornées à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) est :

$$(5/91) \quad F_{1,m}(z) = N f_0(z) + \sum_{k=1}^p C_k f_{1,q-2k\frac{q}{p}}^*(z) \\ + \sum_{l=0}^h D_l f_{1,(2l+1)q}(z) + \sum_{\rho=1}^{m'} E_{\rho} f_{1,q+2\rho\frac{q}{p}}^*(z),$$

l'entier h étant défini par rapport à m par $hp \leq m < (h+1)p$ et la notation $\sum_{\rho=1}^{m'}$ signifiant que la sommation est étendue aux valeurs de ρ depuis $\rho = 1$ jusqu'à $\rho = m$, exception faite des valeurs de ρ multiples de p (cette distinction étant nécessitée par le fait que le comportement asymptotique des fonctions qui interviennent dans les deux dernières sommes est essentiellement différent). Enfin, les quantités N , C_k , D_l , E_{ρ} doivent être *réelles*.

Nous allons d'abord montrer qu'il existe ici des solutions $F_{1,m}^0(z)$ *non identiquement nulles*, bornées à l'infini ($\mathcal{O}$, arg) et qui *tendent vers zéro à l'infini sur la surface libre*. De ce fait, elles tendront vers zéro dans tout le domaine $\mathcal{O}$, comme la démonstration le montrera. Aux §§ 5,415 et 5,424, nous avons montré que de telles solutions n'existaient pas si on les supposait à l'origine finies ou logarithmiquement infinies. On dira que ces solutions sont « totalement évanescentes » à l'infini ($\mathcal{O}$, arg).

5,432 **MÉTHODE DE DÉTERMINATION DES CONSTANTES.**

D'après (5/64), (5/68) et (5/69), il vient :

$$F_{1,m}^0(z) \approx \sum_j' a_j e^{a_j z} \left[N + \sum_{k=1}^p C_k \gamma^{vk} + \nu iD + \sum_{\rho=1}^{m'} E_{\rho} \cdot \gamma^{-\nu\rho} \right] \quad \left(D = \sum_{l=0}^h D_l \right)$$

d'où, par le raisonnement du § 5,412 :

$$(5/92) \quad \sum_{k=1}^p C_k \gamma^{vk} + \nu iD + \sum_{\rho=1}^{m'} E_{\rho} \gamma^{-\nu\rho} + N = 0 \quad \left(\nu = -\frac{p-3}{2} \text{ à } \frac{p+1}{2} \text{ de } 2 \text{ en } 2 \right).$$

Introduisons alors la fraction rationnelle :

$$(5/93) \quad U(\zeta) = \sum_{k=1}^p C_k \zeta^k + \sum_{\rho=1}^{m'} \frac{E_{\rho}}{\zeta^{\rho}},$$

le terme en $\frac{1}{\zeta^m}$ n'intervenant que si $m \neq hp$. Les conditions (5/92) s'écrivent alors :

$$U(\gamma^{\nu}) + \nu iD + N = 0 \quad \left(\nu = -\frac{p-3}{2} \text{ à } \frac{p+1}{2} \text{ de } 2 \text{ en } 2 \right).$$

Procédant comme au § 5,423, on retranche les relations consécutives à partir de la première; comparant à $S(\zeta)$, on en déduit l'identité :

$$U(\zeta \eta^2) - U(\zeta) + 2iD \equiv S(\zeta) \cdot \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{\zeta} + \frac{\delta_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{\delta_m}{\zeta^m} \right),$$

les coefficients $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m$ ($\delta_m = 0$ si $m = hp$) étant *a priori* quelconques, réels ou complexes. Remplaçant U et S par leurs expressions développées, on obtient l'identité :

$$(5/94) \quad \sum_{k=1}^p C_k \zeta^k (\eta^{2k} - 1) + 2iD + \sum_{\rho=1}^m \frac{E_\rho}{\zeta^\rho} (\eta^{-2\rho} - 1) \\ \equiv \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{\zeta} + \dots + \frac{\delta_m}{\zeta^m} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^p A_k \zeta^k \right),$$

où nous avons supprimé l'accent de $\sum_p$ car $\eta^{-2\rho} - 1 = 0$ pour ρ multiple de p , et où nous avons conservé δ_m car l'identification donne $\delta_m = 0$ si $m = hp$.

L'objet essentiel des discussions qui suivent est de savoir si (5/94) permet de déterminer les inconnues C_k, D, E_ρ réelles. On trouverait ensuite N , comme on a trouvé M au § 5,423.

5,433 ÉTUDE DU CAS PARTICULIER $m = 1$.

Ici, $D = D_0$; nous poserons $E_1 = E$ et il n'y a que deux quantités δ : δ_0 et δ_1 . De (5/94) on déduit par identification :

$$(5/95) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) = \delta_1, \\ 2iD = \delta_0 + \delta_1 A_1, \\ C_k (\eta^{2k} - 1) = \delta_0 A_k + \delta_1 A_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, P), \end{array} \right.$$

la dernière relation subsistant d'après (5/77) pour $k = P$, avec $A_{P+1} = 0$. Tirant δ_0 et δ_1 des deux premières relations et portant dans les suivantes, on trouve, après des réductions basées sur (5/77) :

$$\frac{C_k}{A_k} = D (\cotg 2k\omega - i) - EA_1 \sin 2\omega [\cotg (2k+2)\omega - i] \quad (k = 1, 2, \dots, P).$$

La condition de réalité des inconnues se traduit par l'annulation de la partie imaginaire du second membre, soit :

$$(5/96) \quad D = EA_1 \sin 2\omega = (-1)^q E \sin \omega,$$

relation indépendante de k . On obtient ensuite C_k . On voit ainsi que nos inconnues sont déterminées à un facteur réel multiplicatif près; nous prendrons, par exemple :

$$(5/97) \quad D = 1, \quad E = \frac{(-1)^q}{\sin \omega}, \quad C_k = A_k \frac{\sin 2\omega}{\sin 2k\omega \sin (2k+2)\omega},$$

Cette écriture est générale (que m soit supérieur ou inférieur à P), étant entendu que dans les $m + 1$ premières colonnes, les A_k ne sont écrits dans chaque ligne que jusqu'à A_P au plus.

En vue de développer cette expression, introduisons les matrices $(\mathcal{M}_k)$, matrices carrées à un nombre quelconque (assez grand pour les applications) de lignes et de colonnes :

$$(5/100) \quad (\mathcal{M}_k) = \begin{pmatrix} A_k & A_{k+1} & A_{k+2} & \dots & 0 & 0 \\ 1 & A_1 & A_2 & \dots & A_P & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A_1 & \dots & A_{P-1} & A_P & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & A_1 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, P).$$

Dans la première ligne ne figurent que des A d'indice $\leq P$ (en particulier, si $k = P$, la première ligne se réduit à $A_P 0 0 \dots 0$). Nous désignerons alors par Δ_k^s le déterminant formé par les s premières lignes et colonnes de $(\mathcal{M}_k)$.

Dans (5/99), multiplions les éléments de la dernière colonne par $e^{-2kt\omega}$ et séparons les parties réelles et imaginaires de ces relations, compte tenu de ce que les A_k sont réels, et que les C_k , D , E_p doivent l'être. Développant ensuite suivant les éléments de la dernière colonne, on trouve aisément :

$$(5/101) \quad DA_k \sin 2k\omega = \sum_{s=1}^m (-1)^s E_s \Delta_k^{s+1} \sin 2s\omega \sin (2k + 2s)\omega \quad (k = 1, \dots, P);$$

$$(5/102) \quad C_k = \sum_{s=1}^m (-1)^s E_s \Delta_k^{s+1} \left(\frac{\sin 2s\omega}{\sin 2k\omega} \right)^2 \quad (k = 1, \dots, P),$$

les P relations (5/101) constituant les P relations de compatibilité annoncées.

Avant de poursuivre, il nous faut étudier les déterminants Δ_k^s , et tout d'abord les déterminants Δ_1^s .

Étude des déterminants Δ_1^s .

Si l'on développe Δ_1^s suivant les éléments de la première ligne, on a :

$$(5/103) \quad \Delta_1^s = A_1 \Delta_1^{s-1} - A_2 \Delta_1^{s-2} + \dots + (-1)^{r-1} A_r \Delta_1^{s-r} + \dots + \begin{cases} (-1)^{s-1} A_s \Delta_1^0 & (s \leq P), \\ (-1)^{P-1} A_P \Delta_1^{s-P} & (s > P), \end{cases}$$

en posant $\Delta_1^0 = 1$. Nous allons démontrer que Δ_1^s vérifie la relation de récurrence :

$$(5/104) \quad \Delta_1^s \sin 2s\omega = (-1)^{q-1} \cdot \Delta_1^{s-1} \sin (2s-3)\omega.$$

Comme elle est vraie pour $s = 1$ d'après (5/77), nous procéderons par récurrence. Une remarque préalable s'impose : dans (5/104) les sinus peuvent être nuls pour certaines valeurs de s :

$$\begin{aligned} \sin 2s\omega &= 0 & \text{pour} & & s = lp & \quad (l \text{ entier positif}), \\ \sin (2s-3)\omega &= 0 & \text{pour} & & s = P+2+lp. \end{aligned}$$

1° $0 < s < p$.

Multiplions les deux membres de (5/103) par $\sin 2s\omega \neq 0$; si nous remplaçons $\Delta_1^s \sin 2s\omega$ par sa valeur (5/104), nous obtenons la relation :

$$\begin{aligned} (5/105) \quad [A_1 \sin 2s\omega + (-1)^q \sin (2s-3)\omega] \Delta_1^{s-1} - A_2 \Delta_1^{s-2} \sin 2s\omega \\ + \dots + \begin{cases} (-1)^{s-1} A_s \Delta_1^0 \sin 2s\omega = 0 & (s \leq P), \\ (-1)^{P-1} A_P \Delta_1^{s-P} \sin 2s\omega = 0 & (s > P), \end{cases} \end{aligned}$$

qu'il s'agit de démontrer, compte tenu de ce que (5/104) vaut pour $s = 1, 2, \dots, s-1$. Compte tenu également de (5/77), des calculs sans difficulté montrent que, dans (5/105) :

— le premier terme s'écrit :

$$- A_2 \cdot \Delta_1^{s-2} \frac{\sin 4\omega}{\sin \omega} \sin (2s-5)\omega;$$

— la somme des deux premiers :

$$A_3 \cdot \Delta_1^{s-3} \frac{\sin 6\omega}{\sin \omega} \cdot \sin (2s-7)\omega;$$

— la somme des r premiers :

$$(-1)^r A_{r+1} \Delta_1^{s-r-1} \frac{\sin (2r+2)\omega}{\sin \omega} \sin (2s-2r-3)\omega$$

(en procédant par récurrence).

Dans le cas $0 < s \leq P$, si l'on prend $r = s-1$, la somme des termes correspondants vaut $(-1)^s A_s \cdot \Delta_1^0 \sin 2s\omega$ et se détruit avec le dernier terme.

Dans le cas $P < s < p$, la somme des $P-1$ premiers termes vaut $(-1)^P A_P \cdot \Delta_1^{s-P} \sin 2s\omega$ et se détruit avec le dernier.

Ceci permet de calculer les valeurs de Δ_1^s pour $1 \leq s < p$; toutefois, la valeur $s = P+2$ intervient (pour $p > 3$) à cause de l'annulation de $\sin (2s-3)\omega$. D'où deux cas :

Premier cas : $1 \leq s \leq P+1$.

Comparant (5/77) et (5/104), on obtient :

$$(5/106) \quad \Delta_1^s = (-1)^{q+s-1} A_{s-1} \frac{\sin \omega}{\sin 2s\omega} \quad (s = 1, 2, \dots, P+1).$$

En particulier :

$$\Delta_1^{P+1} = 1.$$

Deuxième cas : $P + 2 \leq s \leq p - 1$ (pour $p \geq 5$).

Pour $s = P + 2$, dans (5/104), le second membre est nul, mais $\sin 2s\omega \neq 0$, donc $\Delta_1^{P+2} = 0$. Reportant dans (5/104), on trouve $\Delta_1^{P+3} = 0$ et ainsi de suite, tant que $\sin 2s\omega \neq 0$, c'est-à-dire $s \leq p - 1$. D'où :

$$(5/107) \quad \Delta_1^s = 0 \quad (s = P + 2, \dots, p - 1).$$

2° $s = p$.

(5/104) subsiste comme identité car $\sin 2s\omega = 0 = \Delta_1^{p-1}$.

Pour calculer Δ_1^s , nous aurons recours à (5/103) pour $s = p$. Au second membre, tous les termes disparaissent, sauf le dernier, et l'on trouve :

$$(5/108) \quad \Delta_1^p = -1.$$

3° s quelconque.

(5/104) est donc valable pour $1 \leq s \leq p$; la méthode de récurrence étudiée pour le cas $1 \leq s < p$ permet donc de l'étendre à $p \leq s < 2p$. Mais si l'on change s en $s + p$ dans (5/104) les sinus ne changent pas, donc, d'après (5/108), les valeurs de Δ_1^s pour $p \leq s < 2p$ seront opposées aux valeurs de Δ_1^{s-p} données par (5/106) et (5/107). Il en résulte que pour $s = 2p$, (5/104) est une identité; en outre, (5/103) donnera $\Delta_1^{2p} = 1$.

Ce raisonnement peut être poursuivi; il montre que (5/104) est générale et que les valeurs de Δ_1^s sont telles que :

$$(5/109) \quad \Delta_1^{lp} = (-1)^l, \quad \Delta_1^{s+lp} = (-1)^l \cdot \Delta_1^s \quad (1 \leq s \leq p - 1).$$

Étude des déterminants Δ_k^s .

Théorème.

« Quel que soit s , nous avons les relations :

$$(5/110) \quad \frac{\Delta_1^s \sin 2s\omega}{A_1 \sin 2\omega} = \frac{\Delta_k^s \sin (2s + 2k - 2)\omega}{A_k \sin 2k\omega} \quad (k = 2, 3, \dots, P). \text{ »}$$

De l'expression de Δ_k^s , on déduit immédiatement :

$$(5/111) \quad \Delta_k^s = A_k \cdot \Delta_1^{s-1} - \Delta_{k+1}^{s-1} \quad (k = 1, 2, \dots, P - 1);$$

$$(5/112) \quad \Delta_P^s = A_P \cdot \Delta_1^{s-1}.$$

La relation (5/110) est vraie pour $k = P$; car elle se ramène à (5/104) si l'on tient compte de (5/112).

Procédons par récurrence en démontrant que si (5/110) est vraie pour $k + 1$, elle est vraie pour k . On remplace pour cela Δ_k^s par (5/111) dans la relation (5/110) à démontrer; dans le résultat obtenu, on remplace Δ_{k+1}^{s-1} à l'aide de (5/110) supposée vraie; compte tenu de (5/77), la relation obtenue se ramène, après quelques calculs, à (5/104).

Application aux valeurs de Δ_k^s .

Tant que $\sin(2s + 2k - 2)\omega \neq 0$, on peut utiliser (5/110), ce qui nous ramène aux valeurs de Δ_1^s étudiées plus haut.

Si $\sin(2s + 2k - 2)\omega = 0$, soit pour $s = p - k + 1 \pmod{p}$, (5/110) se réduit à une identité. On utilise alors (5/111) et (5/112); en remarquant que $p - k + 1$ est compris entre $P + 2$ (pour $k = P$) et p (pour $k = 1$). On obtient ainsi $\Delta_k^{p-k+1} = (-1)^k$.

Observons enfin que si l'on change s en $s + p$, Δ_k^s comme Δ_1^s se change en son opposé.

Il est alors facile de dresser le tableau suivant :

$$(5/113) \quad \Delta_k^s = (-1)^{s-1} A_k \cdot A_{s-1} \frac{\sin 2k\omega}{\sin(2s + 2k - 2)\omega} \quad (s = 1, 2, \dots, P + 1);$$

$$(5/114) \quad \left. \begin{array}{ll} \Delta_k^s = 0 & \text{si} \quad s \neq p - k + 1 \\ \Delta_k^s = (-1)^k & \text{pour} \quad s = p - k + 1 \end{array} \right\} \quad (s = P + 2, \dots, p).$$

Relation unique de compatibilité.

(5/110) montre que les P relations (5/101) se réduisent bien, comme nous l'avions signalé, à une seule relation, savoir :

$$(5/115) \quad DA_1 \sin 2\omega = \sum_{s=1}^m (-1)^s E_s \Delta_1^{s+1} \sin 2s\omega \sin(2s + 2)\omega.$$

Au second membre, le coefficient de E_s est périodique en s de période p , car le changement de s en $s + p$ ne change pas les sinus; Δ_1^{s+1} se change en son opposé, ainsi que $(-1)^s$, puisque p est impair.

On remarque ensuite que le coefficient de E_s est nul pour $s = p \pmod{p}$ à cause de $\sin 2s\omega$; pour $s = p - 1 \pmod{p}$, à cause de $\sin(2s + 2)\omega$; pour $P + 1 \leq s \leq p - 2 \pmod{p}$, parce que $\Delta_1^{s+1} = 0$. Ainsi, pour $P + 1 \leq s \leq p \pmod{p}$, les E_s disparaissent de (5/115).

On obtient ainsi :

$$(5/116) \quad D = \sum_{s=1}^m E_s \cdot A_s \cdot \sin 2s\omega \quad (m = 1, 2, \dots, P);$$

$$(5/117) \quad D = \sum_{s=1}^p E_s \cdot A_s \cdot \sin 2s\omega \quad (m = P + 1, \dots, p),$$

et l'on écrirait facilement la relation générale.

Calcul des coefficients C_k .

On utilise (5/102), (5/113) et (5/114). Ici encore, on remarque que le coefficient de E_s est périodique en s de période p . D'autre part, pour $s = p \pmod{p}$, le coefficient de E_s est nul. Des calculs simples donnent alors les résultats suivants :

Si $m = 1, 2, \dots, P$:

$$(5/118) \quad \frac{C_k}{A_k} = \sum_{s=1}^m E_s A_s \frac{\sin^2 2s\omega}{\sin 2k\omega \sin (2k+2s)\omega} \quad (k = 1, 2, \dots, P).$$

Si $m = P + 1, \dots, p - 1$:

$$(5/119) \quad C_k = A_k \sum_{s=1}^P E_s A_s \frac{\sin^2 2s\omega}{\sin 2k\omega \sin (2k+2s)\omega} \quad (k = 1, 2, \dots, p - m - 1);$$

$$(5/120) \quad C_k = A_k \sum_{s=1}^P E_s A_s \frac{\sin^2 2s\omega}{\sin 2k\omega \sin (2k+2s)\omega} - E_{p-k} \quad (k = p - m, \dots, P),$$

en remarquant que pour $m = p - 1$, seule la formule (5/120) a lieu.

Si $m = p$, même formule que pour $m = p - 1$, c'est-à-dire (5/120).

La formule générale s'écrit facilement, compte tenu de la périodicité des coefficients.

Expression générale des solutions $F_{1,m}^0(z)$.

Remarquons tout d'abord que, pour simplifier l'écriture, on peut supprimer N dans (5/91) en revenant aux fonctions $f_{1,\lambda}$ reliées à $f_{1,\lambda}^*$ par (5/44); on le voit d'après l'expression de N :

$$(I) \quad N = -\mathcal{R} U(\eta);$$

$$(II) \quad N = -U(1).$$

1° $m = 1, 2, \dots, P$.

Une seule quantité $D = D_0$ donnée par (5/116); les C_k sont donnés par (5/118). On trouve alors par (5/91) :

$$F_{1,m}^0(z) = \sum_{s=1}^m E_s \mathcal{F}_{1,s}^0(z),$$

avec :

$$(5/121) \quad \mathcal{F}_{1,s}^0(z) = \sum_{k=1}^P A_k A_s \frac{\sin^2 2s\omega}{\sin 2k\omega \sin (2k+2s)\omega} f_{1,q-2k\frac{q}{p}}(z) \\ + A_s \sin 2s\omega f_1(z) + f_{1,q+2s\frac{q}{p}}(z) \quad (s = 1, 2, \dots, m \leq P),$$

$E_1, E_2, \dots, E_m$ étant des constantes réelles *arbitraires*; les fonctions $\mathcal{F}_{1,s}^0(z)$ sont évidemment linéairement indépendantes, car elles diffèrent par la nature de la dernière fonction $f_{1,q+2s\frac{q}{p}}$ qui y figure; en outre, chacune d'elles est totalement évanescence à l'infini ($\mathcal{O}, \arg$).

2° $m = P + 1, \dots, p - 1$.

$D = D_0$ est donné par (5/117), C_k par (5/119) et (5/120). Quelques transformations mettent encore $F_{1,m}^0(z)$ sous la forme :

$$F_{1,m}^0(z) = \sum_{s=1}^m E_s \mathcal{F}_{1,s}^0(z),$$

$\mathcal{F}_{1,s}^0$ étant donnée par (5/121) pour $s = 1, 2, \dots, P$, et ensuite :

$$(5/122) \quad \mathcal{F}_{1,s}^0(z) = f_{1,q+2s\frac{q}{p}}(z) - f_{1,-q+2s\frac{q}{p}}(z) \quad (s = P + 1, \dots, m \leq p - 1),$$

expression sur laquelle il est très facile de vérifier que cette fonction est totalement évanescence à l'infini ($\mathcal{O}, \arg$).

3° $m = p$.

Dans (5/91), E_p n'intervient pas; par contre, $D = D_0 + D_1$. On trouve alors :

$$F_{1,m}^0(z) = \sum_{s=1}^p E'_s \mathcal{F}_{1,s}^0(z),$$

avec $E'_s = E_s$ ($s = 1, 2, \dots, p - 1$), $E'_p = D_1$ (quantités réelles arbitraires). Aux expressions (5/121), (5/122), s'ajoute :

$$(5/123) \quad \mathcal{F}_{1,p}^0(z) = f_{1,3q}(z) - f_{1,q}(z) \quad (f_{1,q} \equiv f_1),$$

résultat déjà obtenu en (4/45).

4° m quelconque.

On utiliserait ici les relations générales donnant D et C_k , et l'on remplacerait dans (5/91). Bornons-nous à donner le résultat des calculs; on obtient :

$$(5/124) \quad F_{1,m}^0(z) = \sum_{s=1}^m E'_s \mathcal{F}_{1,s}^0(z),$$

avec $E'_s = E_s$ (pour $s \neq lp$) et $E'_s = D_l$ (pour $s = lp$), ces quantités étant réelles arbitraires.

Pour expliciter $\mathcal{F}_{1,s}^0(z)$, posons :

$$s = lp + s' \quad (0 \leq s' \leq p-1);$$

on a alors :

$$(5/125) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_{1,lp} = f_{1,(2l+1)q}(z) - f_{1,q}(z), \\ \mathcal{F}_{1,lp+s'} = \sum_{k=1}^p A_k A_{s'} \frac{\sin^2 2s' \omega}{\sin 2k \omega \sin (2k + 2s') \omega} f_{1,q-2k\frac{q}{p}}(z) \\ \quad + A_{s'} \cdot \sin 2s' \omega \cdot f_1(z) + f_{1,(2l+1)q+2s'\frac{q}{p}}(z) \quad (s' = 1, 2, \dots, P), \\ \mathcal{F}_{1,lp+s'} = f_{1,(2l+1)q+2s'\frac{q}{p}}(z) - f_{1,-q+2s'\frac{q}{p}}(z) \quad (s' = P+1, \dots, p-1). \end{array} \right.$$

Conclusion.

L'expression générale (5/124) des fonctions $F_{1,m}^0(z)$ renferme exactement m constantes arbitraires, les fonctions $\mathcal{F}_{1,s}^0(z)$ étant linéairement indépendantes, pour la raison déjà signalée. On peut énoncer :

« La solution la plus générale du problème aux limites, qui soit infinie à l'origine comme $\frac{1}{z^{2m\frac{q}{p}}}$, et totalement évanescence à l'infini $(\mathcal{O}, \arg)$, est une combinaison linéaire à coefficients réels arbitraires de m solutions linéairement indépendantes du problème, dont chacune est totalement évanescence à l'infini $(\mathcal{O}, \arg)$ et est infinie à l'origine comme $\frac{1}{z^{2s\frac{q}{p}}}$ ($s = 1, 2, \dots, m$). »

Ces fonctions $F_{1,m}^0(z)$ sont donc $\propto m$, si l'on conserve dans le résultat la constante réelle multiplicative arbitraire, évidente *a priori*.

5,435 EXPRESSION DES SOLUTIONS LES PLUS GÉNÉRALES BORNÉES A L'INFINI $(\mathcal{O}, \arg)$.

Revenons maintenant aux fonctions $F_{1,m}(z)$ les plus générales définies par (5/91). La condition de borne à l'infini $(\mathcal{O}, \arg)$ conduit alors à (5/92), mise à part la relation qui correspond à $\nu = \frac{p+1}{2}$. Nous aurions alors à l'infini sur la surface libre :

$$F_{1,m}(x) \approx a_q \cdot e^{-ix} \left[U \left(\eta^{\frac{p+1}{2}} \right) + \frac{p+1}{2} iD + N \right],$$

relation que nous pouvons toujours mettre sous la forme :

$$F_{1,m}(x) \approx a_q \cdot e^{-ix} \cdot (a + ib) S \left(\eta^{\frac{p+1}{2}} \right) \quad (a, b \text{ réels}).$$

Si nous considérons alors la fonction $F_{1,m}(z) = aF_0 + bF_1$, ce sera une solution du problème aux limites qui tendra vers zéro à l'infini sur la surface libre, autrement dit une fonction $F_{1,m}^0$. Par conséquent :

« Les solutions les plus générales du problème qui soient bornées à l'infini ($\mathcal{Q}$, arg) sont données par la formule :

$$(5/126) \quad F_{1,m}(z) = a \cdot F_0(z) + b \cdot F_1(z) + F_{1,m}^0(z). »$$

$F_{1,m}^0(z)$ est ici donnée par (5/124) avec m constantes arbitraires.

Pour $b = 0$, nous avons les solutions en phase avec F_0 à l'infini sur la surface libre.

Pour $a = 0$, nous avons les solutions en quadrature avec F_1 à l'infini sur la surface libre. Elles correspondent aux solutions S du cas $p = 1$.

Conséquence.

L'existence des solutions bornées à l'infini ($\mathcal{Q}$, arg) se trouvant par conséquent démontrée dans le cas le plus général, nous pouvons compléter les indications données à la fin du § 5,40 de manière à retrouver l'alternative du § 4,34. En particulier, on voit qu'en théorie linéaire, pour pouvoir former des ondes progressives, il est nécessaire que les solutions, même « physiquement acceptables » admettent, sauf l'une d'elles, une singularité.

5,436 APPLICATION AUX ONDES LIQUIDES.

L'onde de référence étant toujours celle qui correspond à F_0 , on obtient, comme au § 4,43, le théorème suivant :

« A une amplitude et une phase données à l'infini sur la surface libre, il correspond $\propto^m$ ondes progressives se dirigeant vers le rivage où elles sont infinies comme $\frac{1}{z^{\frac{2m}{p}}}$. »

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. O. FRIEDRICH. — *Water waves on a shallow sloping beach*, Comm. Appl. Math., vol. I, Nb 2, 1948, pp. 109-134.
- [2] K. O. FRIEDRICH & H. LEWY. — *The dock problem*, Comm. Appl. Math., vol. I, Nb 2, 1948, pp. 135-148.
- [3] E. ISAACSON. — *Waves against an overhanging cliff*, Comm. Appl. Math., vol. I, Nb 2, 1948, pp. 201-209.
- [4] E. ISAACSON. — *Water waves over a sloping bottom*, Comm. Pure & Appl. Math., vol. III, Nb 1, 1950, pp. 11-31.
- [5] H. LEWY. — *Water waves on sloping beaches*, Bull. of the Am. Math. Soc., vol. 52, Nb 9, 1946, pp. 737-775.
- [6] A. MICHE. — *Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante*, Annales des Ponts et Chaussées, tome 114, 1944, pp. 25-78; 131-164; 270-292; 369-406.
- [7] A. S. PETERS. — *The effect of a floating mat on water waves*, Comm. Pure & Appl. Math., vol. III, Nb 4, 1950, pp. 319-354.
- [8] A. S. PETERS. — *Water waves over sloping beaches and the solution of a mixed boundary value problem for $\Delta^2 \varphi - k^2 \varphi = 0$ in a sector*, Comm. Pure & Appl. Math., vol. 5, Nb 1, 1952, pp. 87-108.
- [9] M. ROSEAU. — *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* :
 — tome 231, 1950, pp. 1212-1214;
 — tome 232, 1951, pp. 211-213; 303-306; 479-481;
 — tome 233, 1951, pp. 844-845; 916-917;
 — tome 234, 1952, pp. 297-299.
Contribution à la théorie des ondes liquides de gravité en profondeur variable (Thèse, Paris, 1951, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air).
- [10] H. RUBIN. — *The dock of finite extent*, Comm. Pure & Appl. Math., vol. VII, Nb 2, 1954, pp. 317-344.
- [11] R. SHERMAN LEHMAN. — *Developments in the Neighbourhood of the beach of surface waves over an inclined bottom*, Comm. Pure & Appl. Math., vol. VII, Nb 3, 1954, pp. 393-439.
- [12] J. J. STOKER. — *Surface waves in water of variable depth*, Quart. Appl. Math., vol. 5, Nb 1, 1947, pp. 1-54.
- [13] A. WEINSTEIN. — *On surface waves*, Can. J. of Math., vol. I, Nb 3, 1949, pp. 271-278.

* * *

Notes aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* qui renferment le résumé des principaux résultats obtenus dans cette étude :

- C.R., tome 239, 1954, pp. 860-862;
- C.R., tome 240, 1955, pp. 1189-1191;
- C.R., tome 240, 1955, pp. 1310-1312;
- C.R., tome 240, 1955, pp. 2113-2115.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

MÉTHODE DE RELAXATION

Vu et approuvé :

Paris, le 31 janvier 1956.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

J. SARRAILH.



IMPRIMERIE



IMPRIMERIE